NAZIONALE
B. Prov.
Per.
3
BIBLIOTECA
VITT. EM. III.
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XXX

Palchetto 3
Num.° d' ordine 1

Digitized by Google

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

TOME V.

BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE

A PARIS,
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.
M. DCC. XXIX.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

TABLE
DES MATIERES
CONTENUËS DANS CE VOLUME.

METHODE pour trouver la Solution des Problèmes par les Excluſions. Par M. FRENICLE DE BESSY. Pag. 1

Abregé des Combinaiſons. Par le même. 87

Traité des Triangles rectangles en Nombre. Par le même.

Iere Partie. 127

IIe Partie. 181

Des Quarrez ou Tables Magiques. Par le même. 209

Table Generale des Quarrez Magiques de quatre. Par le même. 303

Reſolution des quatre principaux Problèmes d'Architecture. Par M. BLONDEL. 355

Digitized by Google

LES divers Ouvrages de M. FRENICLE que l'on a raſſemblé dans ce Volume ont été tirez du Volume *infolio* imprimé au Louvre en 1693. par les ſoins de M. DE LA HIRE. Nous avons rapporté dans l'Hiſtoire la maniere dont ces differens Traitez vinrent entre les mains de M. DE LA HIRE, & ce qui l'engagea à les publier, ainſi qu'il le dit lui-même dans une Préface qu'il mit à la tête du Recuëil qu'il en fit.

La premiere Partie du *Traité des Triangles rectangles en Nombres*, avoit été imprimée dès l'année 1676. *in douze*, & réimprimée avec la ſeconde en 1677. au Louvre, avec les *Problèmes d'Architecture* de M. BLONDEL, & quelques autres Ouvrages de MM. de l'Académie dont on fit un Recuëil *infolio forme d'Atlas.*

A PARIS,

Chez
- GABRIEL MARTIN, ruë S. Jacques, à l'Etoile.
- FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Auguſtins.
- JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils, Imprimeur du Roy & de l'Académie Françoiſe, ruë S. Jacques.
- HIPPOLYTE-LOÜIS GUERIN, ruë S. Jacques, à Saint Thomas d'Aquin, vis-à-vis Saint Yves.

Digitized by Google

METHODE
POUR LA SOLUTION
DES PROBLÊMES
PAR LES EXCLUSIONS.

Par M. FRENICLE.

Digitized by Google

METHODE
POUR TROUVER LA SOLUTION DES PROBLÊMES
PAR LES EXCLUSIONS.

QUOIQUE les queſtions doivent être éxaminées diverſement ſuivant la diverſité de leur ſujet, on peut néanmoins y obſerver quelques regles qui conviennent à toutes en général, & qui peuvent en faciliter la recherche.

On doit toujours connoître quelque proprieté de ce qui eſt requis dans la queſtion ; car ſans cela il ſeroit impoſſible de rien trouver, ſi ce n'eſt que le problême ou la queſtion propoſée ſe donne à connoître par elle-même. Comme ſi l'on demandoit quelque choſe touchant les

nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez ou des côtez d'un triangle : pourvû qu'on ſçache le moyen de faire des quarrez & des triangles, il ſera facile de ſçavoir leur ſomme ſans qu'il ſoit beſoin d'avoir aucune autre proprieté deſdites ſommes. Deſorte qu'il ſuffit de connoître ce qui eſt propoſé ou par ſoi-même, comme les ſommes ſuſdites, ou par quelque proprieté. Comme ſi l'on demandoit quelque particularité touchant les hypotenuſes des triangles rectangles dont les côtez ſont des nombres entiers : car pour y parvenir il ſera néceſſaire d'avoir quelque proprieté deſdites hypotenuſes par le moyen deſquelles on les puiſſe avoir toutes.

Que ſi l'on connoît pluſieurs proprietez de la choſe propoſée, on ſe ſervira de celle qui conduit plus facilement à la queſtion, & par de moindres nombres. Car il faut remarquer que le principal but & ſubtilité de cette méthode, conſiſte principalement à racourcir le chemin, & à choiſir de certains détours qui en ôtent la longueur & les plus grandes difficultez.

Mais parce qu'ordinairement chaque queſtion ſe traite diverſement ſuivant les differentes proprietez dont il ſe faut ſervir, il ſeroit impoſſible de donner des regles pour tous les divers cas qu'on pourroit rencontrer. C'eſt pourquoi l'on a jugé plus à propos de donner des exemples qui ſeront plus utiles pour faire entendre cette méthode, après avoir expliqué quelques regles générales qu'on peut obſerver pour parvenir à la ſolution du problême.

1°. Si l'on connoît en général ce qui eſt propoſé, mais non pas le particulier qu'on propoſe, il faut par le moyen de pluſieurs particuliers connus trouver quelque regle qui conviennent à tous ; & par ſon moyen on trouvera ce qui eſt requis.

Par exemple, ſi l'on demande quels ſont les quarrez dont la ſomme eſt l'hypotenuſe du triangle 57, 176, 185.

Puiſqu'on ſçait en général le moyen de faire des trian-

gles, il en faut conſtruire pluſieurs dont on ſçaura les quarrez, comme le triangle 3, 4, 5, qui a 4 & 1 pour ſes quarrez; 5, 12, 13, qui a 9 & 4; 8, 15, 17, qui a 16 & 1: ou bien même on ſe contentera au commencement de quelqu'un de ces triangles, & puis l'on cherchera quelque voye par laquelle avec 3, 4, 5, par exemple, on puiſſe trouver 4 & 1, & l'ayant trouvée l'on regardera ſi elle convient aux autres triangles, & par ce moyen l'on trouvera ce qui eſt requis.

Ainſi ayant trouvé que prenant la ſomme & la difference des deux côtez impairs 5 & 3, qui ſont 8 & 2, leur moitié 4 & 1 donne les quarrez requis, & trouvant que la même choſe convient aux autres triangles 5, 12, 13; 8, 15, 17, &c. j'obſerverai la même regle pour le triangle propoſé 57, 176, 185, en prenant la ſomme & la difference des deux côtez impairs 57 & 185, qui ſont 242 & 128, leur moitié 121 & 64, donnera les quarrez requis.

2°. Mais ſi l'on ne connoît point ce qui eſt propoſé ni en général ni en particulier, il en faut chercher les proprietez par ce que l'on a de connu. Et pour cet effet il faut conſtruire & faire des nombres ſemblables à celui qui eſt requis en toutes les façons poſſibles, & ſans en obmettre aucun, en commençant par le plus petit, & continuant tant qu'on en ait quelque nombre conſidérable, comme dix ou douze, ou plus ſelon la nature de la queſtion; car quelquefois trois ou quatre ſuffiront, & dans d'autres rencontres il en faudra pluſieurs avant qu'on ait découvert ce que l'on cherche.

Par exemple, ſi l'on demandoit combien de fois quelque nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, je ſuppoſe que je n'aye rien de donné, ſinon le moyen de faire des quarrez, & de les aſſembler deux à deux pour avoir leur ſomme: il faudra voir d'abord ſi les nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez ont quelque proprieté parti-

culiere, afin de pouvoir connoître ſi le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, & ſi quelque nombre peut être pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez. Et après qu'on aura découvert des nombres qui ſont la ſomme de pluſieurs couples de quarrez, & le moyen d'en trouver autant qu'on voudra, on ſe ſervira de la premiere regle pour en faire leur générale, par laquelle on puiſſe trouver ce qui eſt requis.

Mais pour remarquer quelque proprieté deſdits nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, j'aſſemble les quarrez deux à deux, comme 4 & 1 ; 9 & 1 ; 9 & 4 ; 16 & 1 ; 16 & 4 ; 16 & 9, &c. tant que j'en aye quelque multitude notable ; & conſidérant leurs ſommes 5, 10, 13, 17, 20, 25, &c. je regarde ſi j'y pourrai découvrir quelque proprieté qui ne convienne point aux autres nombres, comme l'on montrera plus au long dans l'exemple que l'on donnera dans la ſuite.

3°. Pour n'obmettre aucun nombre de ceux qu'on veut avoir, il faut établir quelque ordre pour ne ſe point égarer dans cette perquiſition ; & cet ordre doit être le plus ſimple & le moins embroüillé qu'il ſera poſſible, & tel que par ſon moyen l'on puiſſe pourſuivre à faire les nombres auſſi avant qu'on voudra ſans aucune confuſion.

Il faut auſſi que cette recherche ſoit la plus courte & la plus facile qu'il ſe pourra faire, & pour y parvenir on ſe ſervira de deux moyens principaux.

La recherche ſera courte ſi l'on conſidere le moins de nombres que la nature de la queſtion pourra porter.

Elle ſera facile ſi l'on ſe ſert des moindres nombres poſſibles.

4°. Pour le premier moyen, qui eſt de faire la perquiſition courte, on ſe ſervira de l'*Excluſion*. Par l'Excluſion on obmet les nombres que l'on aura reconnus inutiles, & qui ne ſervent de rien à la queſtion, & dont on ſe peut très-bien paſſer, comme ſont preſque toujours les multi-

ples, leſquels néanmoins doivent par fois être conſiderez, & principalement en deux cas.

Le premier eſt, lorſque ne ſçachant encore aucune proprieté du nombre requis, on recherche tout ce qui lui appartient, tant comme primitif que comme multiple.

L'autre eſt quand il arrive qu'il n'y a point de répugnance que ce qui eſt requis ſoit fait en partie par des primitifs, & en partie par des multiples tout enſemble: comme lorſqu'on demande trois triangles dont les aires ſoient les côtez d'un triangle rectangle. Dans cet exemple, à cauſe que le triangle a trois côtez, il n'y a point d'inconvenient que ce dernier triangle ait pour un de ſes côtez l'aire d'un triangle multiple, & pour les autres celles de deux autres triangles primitifs; & partant il ne faudra obmettre l'aire d'aucun triangle tant primitif que multiple.

Il faut remarquer que quand on parle de faire la perquiſition courte, ce n'eſt pas que pour cela on ne recherche pluſieurs nombres; mais elle eſt courte, parce qu'en excluant beaucoup de choſes inutiles, on paſſe incontinent bien avant & à de grands nombres par la conſidération de très-peu.

5°. Cette excluſion ſe fait encore en conſidérant les lettres finales des nombres: car il arrive ſouvent que par les finales on voit que pluſieurs nombres ne peuvent avoir la qualité qui eſt requiſe. Mais pour l'ordinaire on ne ſe ſert de cette pratique que quand on connoît pluſieurs proprietez de ce qui eſt requis, & qu'on en cherche d'autres plus éloignées & plus cachées.

Par exemple, ſi l'on veut que quelque nombre ſoit quarré, on conſiderera les finales que les quarrez peuvent avoir; & ces finales ſont 1, 4, 9, avec la lettre précédente paire, & 6 avec la précédente impaire, 25 avec 0, 2, ou 6 auparavant, & enfin 00 précédé d'une finale

quarrée : d'où l'on conclura que les nombres qui finiront par 2, 3, 7, ou 8, ne pourront être quarrez, ou par 5 précédé d'une autre lettre que de 2, ou dont les finales 1, 4, 9, ſeront précédées d'un impair, &c. & partant on les pourra exclure comme inutiles à la queſtion.

Il faudra de même conſidérer les finales des autres nombres dont on aura beſoin,& voir s'il y en a quelqu'une qui leur ſoit particulierement affectée : car bien ſouvent ces finales montrent clairement & démonſtrativement l'impoſſibilité des queſtions dont on ne peut donner de ſolution.

6°. On peut auſſi conſidérer quelques propriétez particulieres de la choſe requiſe pour faire ladite excluſion : par exemple, ſi le nombre requis doit être pairement pair plus ou moins un, ou bien different de l'unité d'un multiple de 6 ou de 8, ou autres telles propriétez, comme ſont les ſuivantes.

Les quarrez qui ne ſont point meſurez par trois, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 3.

Les quarrez impairs ſurpaſſent de l'unité un multiple de 8 ; & ainſi les quarrez impairs qui ne ſe meſurent point par 3, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 24.

Tout quarré qui n'eſt point meſuré par 5, eſt different de l'unité d'un multiple de 5.

Toute hypotenuſe primitive ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4.

La ſomme des deux moindres côtez de tout triangle primitif, eſt toujours differente de l'unité d'un multiple de 8.

Tout nombre premier excepté 2 & 3, eſt different de l'unité d'un multiple de 6.

Ces propriétez & autres étant conſidérées à propos, donnent ſouvent tant d'excluſions, principalement aux queſtions impoſſibles, qu'elles ſemblent en montrer clairement l'impoſſibilité.

7°. Le ſecond moyen par lequel la perquiſition ſe rendra facile, eſt en ſe ſervant des moindres nombres qu'on pourra ; il ſe peut nommer *diminution*. Il y a pluſieurs voyes pour parvenir à cette diminution, auſſi-bien qu'à l'excluſion, comme ſont les ſuivantes.

En cherchant ou en choiſiſſant quelque propriété, qui faſſe que ce qui eſt requis ſe puiſſe trouver par de moindres nombres que ceux que l'on trouve par quelqu'autre proprieté.

Par exemple, ſi l'on cherche les hypotenuſes des triangles rectangles, on les trouveroit ſuivant la proprieté qu'elles ont, qui eſt que leur quarré eſt la ſomme de deux quarrez : mais on les trouvera beaucoup plus facilement & avec des nombres bien moindres, ſi l'on ſe ſert de la proprieté ſuivante, qui eſt que la ſomme de deux quarrez inégaux eſt une hypotenuſe.

Car par la premiere proprieté on trouve, par exemple, l'hypotenuſe 5, parce que les nombres 9 & 16 joints enſemble font 25, quarré de 5. Mais par la ſeconde je trouverai le même nombre 5 en joignant enſemble 4 & 1 ; ce qui eſt beaucoup plus facile & plus court.

8°. Quelquefois auſſi après avoir trouvé une voye pour rencontrer le nombre requis, & ayant déterminé qu'il faut chercher quelque autre nombre pour avoir le requis, ce ſecond ſe trouvera encore par un troiſiéme, & ce troiſiéme par un quatriéme, ce qui ſert quelquefois dans les problêmes impoſſibles pour en démontrer l'impoſſibilité. Comme ſi l'on trouve que pour avoir le 3e ou le 4e il ſe faille ſervir du premier, on verra évidemment l'impoſſibilité de la queſtion. Que ſi elle ne paroît pas fort clairement, cela fait au moins que pour des nombres de deux ou trois lettres qu'on éxamine, étant par après appliquez à la queſtion, les nombres qui en proviendront auront au moins dix ou douze lettres, & par ce même moyen on rejette auſſi une grande multitude de nombres ſuperflus.

Digitized by Google

9° Que ſi la queſtion demande plus d'un nombre, comme ſi l'on requiert un triangle dont l'hypotenuſe ſoit un quarré, & l'enceinte auſſi un quarré, on voit qu'il y a deux nombres auſquels on attribuë la proprieté d'être quarrez. En ce cas on recherchera les moyens de faire chacun d'iceux ſéparément; & pour cela on ſe ſervira des moyens cy-deſſus déduits; puis on conferera les proprietez de chacun des nombres trouvez l'une avec l'autre, & l'on remarquera ſi celles de l'un peuvent compatir avec celles de l'autre, car ſi une des proprietez d'un des nombres détruiſoit celles de l'autre, ou quelqu'une d'icelles, la queſtion ſeroit impoſſible.

10° Si en la recherche on a trouvé pluſieurs nombres tels qu'il eſt requis, on remarquera leurs proprietez particulieres, qui les font diſtinguer d'avec les autres nombres, & qui ſoient communes à tous les nombres d'une même eſpece, en conſidérant ſi tout ce qui a ladite proprieté, a auſſi l'autre proprieté qui étoit requiſe. Par exemple, après avoir remarqué que les nombres premiers qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4, ſont la ſomme de deux quarrez, je regarderai ſi tous les nombres premiers qui ſont la ſomme de deux quarrez, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4; & voyant que pluſieurs deſdits nombres de ſuite à commencer par le moindre & ſans en obmettre aucun, ont cette condition, comme ſont 5, 13, 17, 29, &c. je conclus que ladite proprieté convient à tous les autres premiers, qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4.

Quelquefois auſſi on trouve certaines exceptions auſquelles il faut avoir égard, & conſidérer tout ce qui doit être compris dans leſdites exceptions, en remarquant leur origine & d'où elles proviennent.

Il faut remarquer que cette recherche ne ſert principalement qu'aux queſtions poſſibles, qu'elle trouve ordinairement ſans beaucoup de travail, ne ſe ſervant pour la pluſpart d'autre démonſtration que de la conſtruction:

au

au moins c'eſt-là ſon principal but. C'eſt pourquoi, le plus ſouvent aux queſtions impoſſibles elle donnera bien des voyes pour aller bien avant, & rechercher avec peu de travail juſqu'à des nombres fort grands, encore qu'on ne puiſſe pas arriver au but deſiré, à cauſe de l'impoſſibilité de ce qui eſt propoſé.

Il arrive auſſi par fois, qu'en recherchant des voyes plus courtes & plus faciles, & voulant eſſayer tous les moyens de parvenir au but déſiré, on trouve des contradictions & abſurditez qui font voir l'impoſſibilité.

PREMIER EXEMPLE.

DEux quarrez étant donnez, trouver le triangle qui eſt formé deſdits quarrez; par exemple, 64 & 25 etant donnez, on demande le triangle.

Cette queſtion ſuppoſe qu'on ſçache que les triangles ſont formez par le moyen de deux quarrez, dont la ſomme eſt l'hypotenuſe; & partant par le premier précepte, je chercherai quelques-uns des premiers triangles dont je ſçaurai les quarrez, comme 3, 4, 5, qui eſt formé par les quarrez 4 & 1: j'eſſayerai donc à trouver leſdits 3, 4, 5, par le moyen de 4 & 1. Et premierement je voi que la ſomme de 4 & 1, eſt l'hypotenuſe 5, & la difference des mêmes 4 & 1, eſt le côté impair 3, reſte donc à trouver le côté pair 4. Je voi bien que le produit de 4 par 1 donne 4, mais cela ne pourroit pas arriver aux autres quarrez, parce que d'ordinaire le produit de deux nombres eſt plus grand que leur ſomme; & partant, ſi le côté pair étoit le produit des deux quarrez, il ſeroit preſque toujours plus grand que la ſomme, qui eſt l'hypotenuſe: ce qui ne ſe peut.

Il faut donc former 4 par une autre voye: & puiſque les quarrez ne le donnent pas facilement, j'aurai recours à leurs racines 2 & 1, dont le produit eſt 2, le double duquel eſt 4.

Je conſidere maintenant ſi la même choſe ſe fait & ſe trouve aux autres triangles.

Ainſi ayant 9 & 4, qui ſont le triangle 5, 12, 13, je voi que la ſomme deſdits 9 & 4 eſt l'hipotenuſe 13, & leur difference eſt le côté impair 5. Pour le côté pair je prens les racines deſdits quarrez, qui ſont 3 & 2; leur produit eſt 6, dont le double qui eſt 12 eſt le côté pair dudit triangle.

J'examinerai encore la même choſe aux triangles ſuivans 8, 15, 17, qui provient de 16 & 1, & à 20, 21, 29, qui eſt fait par 25 & 4; ce qui me donne à connoître que cette regle convient à tous les triangles, puiſqu'elle eſt propre à ceux que nous venons d'éxaminer, qui ſont aſſez differens les uns des autres, ſinon les deux premiers 3, 4, 5, & 5, 12, 13, qui ſe reſſemblent en ce que le grand côté n'eſt different de l'hypotenuſe que de l'unité.

Je viendrai donc aux quarrez propoſez 64 & 25; & leur appliquant ladite regle, je trouverai le triangle 39, 80, 89.

SECOND EXEMPLE.

UN quarré étant donné, trouver un autre quarré, qui étant joint avec le donné, faſſe un troiſiéme quarré.

On donne par exemple 64.

Je cherche deux quarrez, qui étant joints enſemble, faſſent un quarré, comme ſont 16 & 9, dont la ſomme eſt 25.

Puis je cherche quelque voye par le moyen de laquelle je trouve 9 avec 16; car ici il faut choiſir le quarré pair 16, puiſque le donné, ſçavoir 64, eſt pair: ou ſi je ne puis trouver 9 facilement, je chercherai ſa racine 3.

Si j'ôte 1 de la racine de 16, ſçavoir de 4, il reſtera 3, racine de 9: je regarde donc aux autres quarrez pairs ſi la même choſe arrivera.

Digitized by Google

Je prens par exemple 36, dont la racine 6 étant diminuée d'1, reſte 5; le quarré duquel, ſçavoir 25, étant joint à 36, donne 61 qui n'eſt point quarré: ce qui me donne à connoître que cette regle n'eſt pas la vraye, puiſqu'elle n'eſt pas générale, quoiqu'il pourroit arriver en d'autres queſtions, que certains quarrez n'auroient pas la proprieté requiſe. Mais je trouve ici que 36 étant joint au quarré 64, donne 100, qui eſt un quarré; & partant ledit 36 n'eſt pas exclus d'avoir ladite proprieté.

Je cherche donc quelque autre convenance de 9 à 16; & parce que 4 y étoit propre dans la premiere regle, je regarde ſi je ne pourrai point tirer 4 de 16 autrement qu'en le conſidérant comme racine de 16.

Je voi que 4 eſt le quart de 16, je le conſidererai donc en cette qualité, & par même moyen j'éprouverai la même choſe au ſuſdit 36 dont le quart eſt 9, duquel ôtant 1, reſte 8, dont le quarré 64 étant joint à 36, donne 100, qui eſt un quarré: ce qui me fait préſumer que la regle eſt bonne, & on en pourra être entierement aſſuré en l'eſſayant ſur d'autres quarrez.

Je prens donc le quart du quarré donné 64, qui eſt 16, dont ôté 1, reſte 15, le quarré duquel 225 étant joint à 64, donne 289 quarré de 17, qui ſurpaſſe ledit quart 16 de la même unité.

Mais je voi auſſi que le même 64 étant joint à 36, fait un quarré; & partant afin que la regle ſoit plus parfaite, il ſera bon de donner un moyen pour trouver tous les quarrez auſquels un quarré étant joint, donne un autre quarré. Je l'éprouve à 64, & ayant pris ſon quart 16, je cherche le moyen de trouver par icelui la racine de 36 qui eſt 6. Ce 6 eſt la moitié moins 2 de 16: or pour avoir la moitié il faut diviſer par 2; de ſorte que ce 2 pourroit paſſer pour partie de 16, & dans cette conſidération on a pû auſſi prendre l'unité quand on l'a ôté de 16.

De même donc que j'ai pris la ſomme & la difference de 16 & 1, qui ſont comme parties rélatives de 16 pour avoir 17 & 15, qui ſont les racines des quarrez requis: de même auſſi je prendrai 2 & 8 pour parties rélatives du même 16, la ſomme & la difference deſquelles eſt 10 & 6, dont les quarrez 100 & 36 ſont tels qu'il eſt requis; car joignant 36 à 64, on a 100.

Je prendrai garde après ſi la même choſe arrive aux autres quarrez qui ont plus de parties.

Je prens donc 144, & cherche les quarrez auſquels étant joint on peut avoir un quarré.

Son quart eſt 36. Les parties rélatives de 36 ſont 1,36] 2, 18] 3, 12] & 4, 9: il n'y en a point d'autres, car 6 & 6 ſont ſemblables; ce qui fait qu'ils n'ont point de difference dont on ſe puiſſe ſervir.

Je prens la ſomme & la difference de chaque couple deſdites parties, & trouve 37, 35] 20, 16] 15, 9] & 13, 5 & partant 144 étant joint au quarré de 35, qui eſt 1225, fait 1369, quarré de 37.

Le même 144 étant joint à 256, quarré de 16, donne 400, quarré de 20.

144 avec 81, quarré de 9, donne 225, quarré de 15.

Et enfin 144 avec 25, quarré de 5, donne 169, quarré de 13.

Pour voir ſi 144 ne ſe peut joindre qu'à 4 quarrez pour faire un quarré, & 64 à 2 ſeulement; je conſidere que lors qu'un quarré étant joint à un autre quarré, fait un quarré, les racines de ces trois quarrez ſont les côtez d'un triangle. Je verrai donc à combien de triangles la racine du quarré donné ſert de côté; & je trouve que 8, racine de 64, ne ſert de côté qu'à deux triangles; & 12 racine de 144, ne ſert qu'à quatre. Puis donc que j'ai trouvé la même choſe auſdits quarrez par l'examen des parties de leur quart, j'infererai que la regle eſt bonne. Que ſi ces deux exemples n'en donnent pas une entiere

assurance, on le pourra encore éprouver sur d'autres quarrez.

Mais si on ne sçavoit pas à combien de triangles un nombre donné sert de côté, il faudroit éxaminer lesdits quarrez d'une autre sorte, sçavoir en joignant le donné avec plusieurs quarrez, pour voir si la somme feroit un quarré; & pour y parvenir on se pourra servir des exclusions dont on a cy-devant parlé; & voici comme on y procedera; prenant 144 pour exemple.

Je considere premierement si cet examen a des bornes, ou si on peut éxaminer utilement lesdits quarrez à l'infini; & pour ce qu'il faut ajouter à 144 un quarré pour avoir un autre quarré, il s'ensuit que 144 doit être la difference de deux quarrez.

Je considére donc quelle doit être la difference de deux quarrez, & je trouve que les quarrez allant toujours en augmentant, leurs differences augmentent aussi à mesure: de sorte que deux quarrez, dont les racines ont pareille difference que celles de deux autres quarrez, n'auront pas entr'eux pareille difference; mais les quarrez les plus grands auront plus grande difference: ainsi 25 & 64, dont les racines 5 & 8 ont 3 pour difference, different plus entre eux que 4 & 25, dont les racines 2 & 5 ont pareille difference qui est 3.

Puis donc que les differences augmentent toujours, il s'ensuit que 144 a des bornes, & qu'il ne faut pas poursuivre l'examen que jusqu'à certains quarrez.

Or le quarré proposé étant pair, il ne peut pas être different de deux quarrez dont les racines ne different que de l'unité, parce que de ces deux quarrez l'un étant pair & l'autre impair, la difference seroit impaire.

Mais dans les 4 couples de quarrez qu'on a trouvez auſquels 144 sert de difference, on a ceux de 35 & 37, qui sont les plus grands auſquels ledit 144 puisse servir de difference; car puisque lesdites racines doivent avoir

au moins 2 de difference, ſi on prenoit deux autres nombres plus grands que 35 & 37, & qui euſſent une pareille difference, il eſt certain que la difference de leurs quarrez ſeroit plus grande que celle des quarrez de 35 & 37, qui eſt 144.

Il faut donc à 144 ajouter tous les quarrez juſqu'à celui de 35, & voir ſi quelques-unes des regles des excluſions auront ici lieu.

Et premierement celle qui exclut les multiples ne peut pas être ici employée, puiſque 144 peut auſſi bien être la difference de deux quarrez compoſez entr'eux, que premiers entr'eux.

Mais on aura égard à la cinquiéme regle qui conſidere les finales, leſquelles dans les quarrez ſont 1,4,5,6,9 & 0.

Si à 144 on ajoute un quarré finiſſant par 1, la ſomme finira par 5; mais 5 eſt toujours précédé de 2 dans les quarrez, & partant il faudra que ledit 1 ſoit précédé de 8, afin que ce 8 étant joint à la pénultiéme lettre 4, on ait 2 pour pénultiéme; & partant ſi le quarré qu'on ajoute finit par 1, il doit au moins finir par 81.

4 étant joint à 4 donne 8, qui n'eſt point une finale quarrée, & partant on n'ajoutera point à 144 les quarrez qui finiſſent par 4.

Pareillement les quarrez qui finiſſent par 9, ne pourront être ajoutez à 144, parce que la ſomme auroit 3 pour finale, qui partant ne ſeroit point quarrée.

Mais on pourra joindre à 144 les quarrez qui finiront par 5 & 0.

On y pourra joindre auſſi les quarrez finiſſans par 6, pourvû qu'ils finiſſent par 56, afin que la ſomme ait 00 pour finale.

Cela poſé, il ne faudra point ajouter à 144 les quarrez 1, 4, 9 & 16, pour les cauſes déduites, ni le quarré qui ſuit 144, ſçavoir 169 dont la difference à 144 eſt 25.

Après 25 il faudra venir à 36, 49 & 64, qu'il faut laiſ-

ſer pour les mêmes cauſes cy-deſſus déduites.

81 étant joint à 144 donne 225, quarré de 15.

100 étant joint à 144 donne 244, qui n'eſt point quarré.

121, 169, 196, doivent être laiſſez à cauſe des finales.

225 joint à 144, donne 369, qui n'eſt point quarré.

256 joint à 144, donne 400, quarré de 20.

289, 324, 361, ſeront laiſſez à cauſe des finales.

400 & 144 donnent 544, qui n'eſt point quarré.

441, 484, 529, 576, 676, 729, 784, 841, 961, 1024 & 1089, ſeront auſſi laiſſez à cauſe des finales.

625 joint à 144 donne 769, qui n'eſt point quarré.

900 joint à 144 donne 1044, qui n'eſt point quarré.

1156 joint à 144 donne 1300, qui n'eſt point quarré.

Enfin 1225, quarré de 35, joint à 144, donne 1369, quarré de 37. Nous n'avons donc que les 4 couples de quarrez cy-devant trouvez, auſquels 144 ſerve de difference.

Juſqu'ici on a éxaminé la queſtion en ſuppoſant un quarré pair donné : mais qui voudra voir tout ce qui dépend de la queſtion, doit conſidérer la méthode de trouver la même choſe, le quarré donné étant impair ; par exemple, 81 étant donné, trouver un quarré qui étant joint avec icelui faſſe un autre quarré.

Je prens pour cet effet quelque quarré connu, comme 9, auquel je ſçai qu'ajoutant 16 on a 25.

Je cherche donc un moyen pour trouver 16, ou ſa racine 4 avec le quarré donné 9.

Je voi d'abord qu'ôtant 1 de 9, & prenant la moitié du reſte, on aura 4. Je conſidererai donc la même choſe aux autres quarrez impairs.

Ainſi je trouve qu'ôtant 1 de 25 reſte 24, dont la moitié eſt 12, le quarré duquel 144 étant joint à 25, donne 169, quarré de 13.

La même choſe arrivera auſſi à 49 & à 81, car celui-cy étant joint à 1600, quarré de 40, donne 1681 quarré de 41.

Digitized by Google

On pourra auſſi conſidérer que les quarrez impairs dont la racine n'eſt pas un nombre premier, peuvent être joints avec pluſieurs quarrez pour faire un quarré.

Ainſi éxaminant 81 comme on a fait cy-devant 144, on trouvera qu'étant joint audit 144, il fera 225 quarré de 15.

Il faudra donc trouver une voye pour rencontrer 144, ou ſa racine 12, par le moyen de 81.

Or puiſque nous ſçavons que les quarrez dont la racine eſt un nombre premier, ne peuvent être joints qu'avec un ſeul quarré pour faire un quarré, comme on peut voir à 9, 25, 49, &c. & que ceux dont la racine eſt compoſée peuvent être joints avec pluſieurs, cela fait préſumer que les parties deſdits quarrez ſont cauſe de cela; car 9, par exemple, ne peut être fait par multiplication de nombres differens, que par 1 & 9; de même en eſt-il de 25 qui n'a que 1 & 25, & ainſi des autres. Mais 81 peut être fait par 1 & 81, & par 3 & 27.

A cauſe de 1 & 81 on trouve le quarré de 40 & celui de 41; car on voit qu'ôtant 1 de 81 la moitié du reſte eſt 40, de même ajoutant 1 à 81 la moitié de la ſomme eſt 41.

On agira donc de même aux autres parties de 81, ſçavoir 3 & 27, prenant la moitié de leur ſomme & de leur difference. La ſomme eſt 30, la difference 24, la moitié deſquelles eſt 15 & 12: on verra donc ſi ajoutant à 81 le quarré de 12 on aura celui de 15, ce qui ſe trouve être ainſi.

On éprouvera la même choſe ſur quelqu'autre quarré, dont la racine ſera compoſée, comme ſur 225 quarré de 15.

Les parties rélatives de 225 ſont 1, 225] 3, 75,] 5, 45, & 9, 25.

La moitié de la ſomme & de la difference deſdites parties ſont 113, 112,] 39, 36,] 25, 20,] & 17, 8.

Partant ſi on ajoute 225 au quarré de 112, on aura le quarré de 113. 225

225 joint au quarré de 36, donne celui de 39.
225 étant joint au quarré de 20, donne celui de 25.
Et enfin 225 avec le quarré de 8, donne celui de 17.

TROISIE'ME EXEMPLE.

UN nombre étant donné, déterminer s'il eſt hypotenuſe de quelque triangle, & quels ſont les deux côtez dudit triangle.

Afin de donner facilement la ſolution de cette queſtion, dans laquelle ſi l'on propoſoit quelque nombre particulier, comme ſi l'on demandoit ſi 221 eſt hypotenuſe; il faut voir ſi on pourra remarquer quelque ſorte de nombres affectez particulierement aux hypotenuſes; & pour y parvenir, je me ſervirai du ſecond précepte, puiſque je ne ſçai pas encore les proprietez particulieres des hypotenuſes, & que ce ſont elles qu'il faut chercher. Mais il faut ſçavoir ce que c'eſt qu'une hypotenuſe, & quel moyen on a d'en trouver quelqu'une.

Que la proprieté ſuivante ſoit donnée.

Le quarré de l'hypotenuſe d'un triangle rectangle vaut autant que les quarrez des deux autres côtez du triangle.

Partant ſi l'on joint chaque quarré à chaque quarré, on aura les quarrez de toutes les hypotenuſes, ſçavoir quand la ſomme des deux quarrez viendra à être quarrée.

Je cherche donc par le ſecond précepte toutes les hypotenuſes ſans en obmettre aucune, commençant par la moindre, & pour y parvenir j'aſſemble tous les quarrez.

Mais de peur de s'embarraſſer, & pour n'obmettre aucune hypotenuſe, je forme quelqu'ordre par le troiſiéme précepte, par lequel je puiſſe pourſuivre l'aſſemblage deſdits quarrez auſſi loin que je voudrai, & tel auſſi (autant que faire ſe pourra) qu'on puiſſe s'arrêter où on voudra, ſans que le travail qu'on aura commencé oblige à continuer bien avant, & auſſi ſans qu'on ſoit obligé (en cas qu'on voulut pourſuivre la recherche plus avant) de

reprendre ce qu'on auroit quitté. Ce qui ſe doit entendre, ſi cela ſe peut faire commodément.

†4	1	5
9	1	10
†9	4	13
†16	1	17
16	4	20
†16	9	25 & 5
25	1	26
†25	4	29
25	9	34
†25	16	41
†36	1	37
36	4	40
36	9	45
36	16	52
†36	25	61
49	1	50
†49	4	53
49	9	58
†49	16	65
49	25	74
†49	36	85
†64	1	65
64	4	68
†64	9	73
64	16	80
†64	25	89
64	36	100 & 10
†64	49	113

Par exemple, ſi pour aſſembler leſdits quarrez on ajoutoit au premier quarré 1 tous les autres quarrez juſqu'à celui de 200, & que par après on vint à les ajouter à 4, puis à 9, on s'obligeroit, pour avoir toutes les hypotenuſes moindres, de parcourir preſque tous les quarrez, & on entreprendroit un grand travail ſans peut-être en avoir beſoin.

Au contraire, ſi après avoir aſſemblé tous leſdits quarrez l'un à l'autre, on vouloit pouſſer la recherche plus avant, il faudroit reprendre ce qu'on auroit laiſſé, car il faudroit recommencer à 1, & lui ajouter les quarrez plus grands que celui de 200, ce qui apporteroit quelque déſordre. Il vaudra donc mieux prendre un autre ordre, comme cy-après.

Je prens le quarré 4, & lui ajoute 1.

Puis je viens à 9, & lui ajoute tous les moindres, commençant à 1.

Puis je prens 16, & lui ajoute les quarrez moindres 1, 4, 9, & je mets la ſomme enſuite de chaque couple de quarrez, comme on voit ici. Et continuant en cette façon autant loin qu'on voudra, je remarque les couples dont la ſomme eſt quarrée, parce que la racine de ce

81	1	82	quarré eſt l'hypotenuſe d'un triangle.
†81	4	85	Et par le moyen de cette addition on
81	9.	90	trouvera des hypotenuſes, & aucune ne
†81	16	97	pourra être obmiſe.
81	25	106	Mais parce que je voi qu'il arrive peu
81	36	117	ſouvent que la ſomme ſoit un quarré, je
81	49	130	conſidere s'il n'y a rien de ſuperflu dans
†81	64	145	cette Table.

Les nombres qu'on veut avoir doivent être quarrez: je conſidererai donc quelque proprieté du quarré, comme que tout quarré eſt pairement pair, ou pairement pair +1.

Mais ſi on ajoute enſemble deux quarrez impairs, comme 9 & 1,] 25 & 9, la ſomme ſera impairement paire; parce que les deux quarrez étant chacun un pairement pair +1, les deux enſemble feront un pairement pair +2, qui eſt un impairement pair.

De là on conclura qu'il eſt ſuperflu d'ajouter enſemble deux quarrez impairs; car leur ſomme étant impairement paire, ne peut pas être quarrée.

Je conſidere auſſi ſuivant le quatriéme précepte ſi les quarrez compoſez entr'eux peuvent être exclus, comme étant multiples d'autres couples de quarrez premiers entr'eux.

Je trouve que les triangles étant multipliez par quelque nombre que ce ſoit, donnent toujours d'autres triangles, car la proportion des côtez ne change point; & ſi deux quarrez étant joints enſemble font un quarré, ſi on multiplie leſdits quarrez par quelque quarré, il eſt certain que la ſomme de ces multiples ſera encore un quarré, qui ſera meſuré par le même quarré qui aura multiplié les deux autres.

Il faudra donc retrancher de la Table les quarrez qui ſont de même ordre, & ceux qui ont une commune meſure.

Reſte donc de pourſuivre la Table, en joignant les quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres, leſquels auſſi je marquerai en la Table précédente, afin de les diſtinguer des autres.

100	1	101
100	9	109
100	49	149
100	81	181
121	4	125
121	16	137
121	36	157
121	64	185
121	100	221
144	1	145
144	25	169 & 13
144	49	193
144	121	265
169	4	173
169	16	185
169	36	205
169	64	233
169	100	269
169	144	313
196	1	197
196	9	205
196	25	221
196	81	277
196	121	317
196	169	365
225	4	229
225	16	241
225	64	289 & 17
225	196	421

On pourroit par après avoir égard aux finales, ainſi qu'il eſt montré au cinquiéme précepte; car on voit que dans cette ſeconde Table, quoiqu'il y ait déja un grand racourciſſement; néanmoins ſi on vouloit ôter toutes les finales inutiles, il y en auroit encore un beaucoup plus grand.

On pourroit enſuite conſidérer quelque proprieté des quarrez, comme que ceux qui ne ſont pas meſurez par 3, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 3. Mais parce qu'on a déja exclu les quarrez qui ont une commune meſure, il s'enſuit qu'il n'y aura aucune des ſommes ſuſdites qui ſoit meſurée par 3; car pour être telle il faudroit que chacun des quarrez fut multiple de 3, puiſque les quarrez ſont ou multiples de 3, ou multiples de $3+1$; partant ſi chacun des quarrez ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, la ſomme ſera multiple de $3+2$, ou multiple de $3-1$, & partant elle ne pourra pas être quarrée.

Il faudra donc que des deux quarrez que l'on ajoute, l'un ſoit

256	1	257
256	9	265
256	25	281
256	49	305
256	81	337
256	121	377
256	169	425
256	225	481

multiple de 3, & l'autre multiple de 3 + 1, ce qui exclut encore beaucoup d'additions.

Mais avant que de continuer ladite table ſuivant les régles deſdites excluſions, il faut voir ſi les ſommes quarrées qu'on a trouvées ne pourront rien apprendre touchant ce qui eſt propoſé, & ſi on ne pourra point trouver quelque proprieté deſdites hypotenuſes, outre celle en vertu de laquelle on les a trouvées juſques ici.

Je trouve ici 25, 100, 169, & 289, qui entre leſdites ſommes ſont quarrées; mais 100 eſt du nombre de celles qui ont été rejettées, parce qu'il provient de deux quarrez qui ont une commune meſure.

Les racines de ces nombres, ſçavoir 5, 10, 13, 17, ſeront donc hypotenuſes de triangles rectangles dont les deux autres côtez ſeront les racines des quarrez qu'on a aſſemblez pour avoir leſdits quarrez 25, 100, 169, 289.

Ainſi 25 étant la ſomme des quarrez 16 & 9, les racines des trois quarrez 25, 16, 9, qui ſont 5, 4, 3, ſeront les côtez d'un triangle rectangle.

Mais en conſidérant ma premiere table, je vois qu'elle contient leſdits nombres 5, 10, 13, 17, que j'ai trouvé être hypotenuſes, & qu'ils ſont de ſuite dans la colomne où ſont les ſommes des quarrez; car 4 & 1 donnent 5,] 9 & 1 donnent 10,] 9 & 4 donnent 13,] & 17 vient de 16 & 1 : il ſe pourroit donc faire que non ſeulement les quarrez des hypotenuſes ſont la ſomme de deux quarrez, mais auſſi que les hypotenuſes mêmes ſont pareillement la ſomme de deux quarrez; ce qu'il faut examiner.

Je voy déja que 5, 13 & 17, ſont hypotenuſes; & de plus j'ai dans la table pluſieurs multiples deſdits 5, 13 & 17, qui ſont pareillement hypotenuſes, comme 10,

20, 40, 45, 26, 34, &c. & qui ſont auſſi la ſomme de deux quarrez.

Il faut donc voir ſi les autres nombres premiers de la table ſont pareillement hypotenuſes, ſçavoir 29, 41, 37, 61, &c.

Mais parce qu'il ſeroit trop long d'examiner ſi les quarrez deſdits nombres ſont la ſomme de deux quarrez, je cherche quelqu'autre voye qui n'oblige point de conſiderer leſdits quarrez.

Cette voye ſera de ſatisfaire à la ſeconde partie de la queſtion, ſçavoir de donner les deux autres côtez du triangle, ce qui ſe trouvera par la premiere regle, puiſqu'on a les quarrez dont l'hypotenuſe eſt la ſomme, & qu'on ſçait les côtez de quelques triangles, ſçavoir de ceux dont 5, 13 & 17 ſont hypotenuſes. Car par la table ſuſdite on voit que 5 eſt hypotenuſe, & que 3 & 4 ſont les côtez, parce que 25 quarré de 5, eſt la ſomme de 9 & 16, quarrez de 3 & 4; de même on trouvera que 5 & 12 ſont les côtez du triangle dont 13 eſt hypotenuſe, & que 8 & 15 ſont les côtez du triangle 8, 15, 17.

Cela ſuppoſé on requiert une voye ou regle par laquelle on puiſſe trouver leſdits côtez, ſçachant ſeulement l'hypotenuſe & les deux quarrez dont elle eſt la ſomme.

Cette regle ſe trouvera par le premier exemple qui a été donné ci-devant; & l'appliquant à tous les nombres de la table, je trouve les côtez des triangles dont ils ſont hypotenuſes. Par exemple, 29 eſt la ſomme de 25 & 4, la difference deſdits quarrez qui eſt 21 eſt le côté impair: ſi donc 29 eſt hypotenuſe, & 21 l'un des côtez de ſon triangle, il faudra que le quarré de 21 étant ôté de celui de 29, il reſte un quarré dont la racine ſoit l'autre côté du triangle. J'ôte donc 441 quarré de 21, de 841 quarré de 29, reſte 400 quarré de 20, qui eſt l'autre côté, & partant 29 eſt hypotenuſe. La même choſe ſe pourra examiner aux autres hypotenuſes ſuivantes, & même auſſi aux

multiples ; car ſi en les prenant de ſuite & ſans aucun choix, on trouve la même choſe à toutes, je conclus que ladite regle eſt générale, ſçavoir que la ſomme de deux quarrez inégaux eſt l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont les côtez ſont tels nombres qu'on voudra.

Mais il ne faut pas ſe contenter de cela, car il faut examiner la converſe, ſçavoir ſi toute hypotenuſe eſt la ſomme de deux quarrez.

J'ai ici de deux ſortes d'hypotenuſes, ſçavoir de primitives, qui ſont nombres premiers, ou au moins qui ſervent à des triangles dont les côtez n'ont point de commune meſure, & d'autres qui ſont multiples d'autres hypotenuſes primitives, & dont les côtez ne ſont pas premiers entr'eux, mais qui ſe peuvent méſurer par un même nombre.

Pour ce qui eſt des hypotenuſes primitives, je vois ici pluſieurs nombres qui ſervent d'hypotenuſe à des triangles fort differens, comme 3, 4, 5,] 8, 15, 17,] 20, 21, 29,] 28, 45, 53, &c. qui ſont tous la ſomme de deux quarrez ; partant il n'y a aucune apparence qu'il y ait d'autres nombres premiers qui ſoient hypotenuſes, & qui ne ſoient point la ſomme de deux quarrez ; car les uns ne peuvent pas avoir plûtôt cette proprieté que les autres, puiſqu'elle ſe trouve en pluſieurs triangles fort differens. Que ſi on s'en vouloit aſſûrer davantage, il faudroit examiner quelques-uns des autres nombres premiers en les prenant de ſuite, comme 7, 11, 19, 23, & voir ſi leurs quarrez ſont la ſomme de deux quarrez ; ce qui ſe pourra faire, en ôtant, par exemple, de 529 quarré de 23, les quarrez qui ſont moindres, & conſiderant ſi le reſte ſera quarré, en ſe ſervant pour cet effet des finales des quarrez. Mais on trouvera toûjours que les nombres premiers qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, ont un quarré qui n'eſt point auſſi la ſomme de deux quarrez : ainſi parce que 23 n'eſt point la ſomme de deux quarrez, ſon quarré 529 ne la ſera pas auſſi.

Reſte donc à examiner les multiples, & pour cet effet je prens quelque hypotenuſe primitive, comme 5, & je la multiplie par pluſieurs nombres pris de ſuite ſans aucun choix, & ſans en omettre aucun, comme par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & j'aurai 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, &c. leſquels derniers nombres ſont de néceſſité hypotenuſes, puiſqu'ils ſont multiples de 5, car on a trouvé que multipliant un triangle par quelque nombre que ce fût, on a encore un triangle dont les côtez ont entr'eux même proportion.

Je regarde par après en la premiere table où ſont les aſſemblages de tous les quarrez, tant ceux qui ſont premiers entr'eux, que ceux qui ont une commune meſure; & tant ceux de même ordre, que de divers ordres.

En cette table je trouve bien quelques-uns deſdits nombres, comme 10, 20, 25, 40, 45, mais je n'y trouve pas les autres, ſçavoir 15, 30, 35, d'où je conclus que toute hypotenuſe n'eſt pas la ſomme de deux quarrez. Et conſiderant quelle difference il peut y avoir entre les hypotenuſes qui ſont la ſomme de deux quarrez & celles qui ne le ſont pas, je trouve que les premieres ſont ou bien multiples d'une hypotenuſe par un quarré comme 20 & 45, ou par un double quarré comme 10 & 40, ou qu'elles ne peuvent être meſurées que par des hypotenuſes comme 25; & paſſant outre en ladite table, on trouveroit encore 50, 65, & 85: mais ces trois dernieres ont encore cela de particulier, qu'en vertu des quarrez dont elles ſont la ſomme, elles ſervent d'hypotenuſe à des triangles primitifs.

Les autres hypotenuſes qui ne ſe trouvent point dans ladite table, & partant qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, comme 15, 30, 35, 55, ſont multiples d'hypotenuſes par des nombres qui ne ſont ni quarrez, ni doubles quarrez, ni hypotenuſes, car les trois premieres ſont multiples de 5, par 3, 6 & 7.

Mais

Mais il faut voir ſi on ne pourra point découvrir quelqu'autre proprieté des hypotenuſes ; & pour y parvenir, je conſidere les ſeules hypotenuſes primitives, laiſſant-là les multiples qui n'ont autre choſe que ce qu'elles empruntent de leurs primitives, dont voici quelques-unes.

5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109.

Je vois premierement que tous les nombres premiers ne ſont pas en ce rang, & qu'il y a auſſi des nombres compoſez, mêlez parmi, mais non pas tous, car on n'y trouve point 21, 49, & autres.

Afin donc de débroüiller un peu ces nombres, je les ſépare en premiers & compoſez, & je regarde quelles ſont les parties des compoſez, 25 eſt le quarré de 5, 65 a pour parties 5 & 13,] & 85 a 5 & 17.

Je conſidere que leſdits nombres 5, 13 & 17 ſont compris entre les nombres premiers qui ſont hypotenuſes : d'où je conclus que les nombres compoſez de ſeules hypotenuſes ſont auſſi hypotenuſes primitives, de même que les nombres premiers dont ils ſont compoſez.

Reſte donc à conſiderer les nombres premiers ſuſdits, 5, 13, 17. Je regarde auſſi quels ſont les autres nombres premiers qui ne ſe trouvent point en ma liſte. Ces nombres ſont 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, &c. je compare les uns avec les autres pour voir ſi les premiers n'ont point quelque proprieté qui ne ſoit point aux derniers, & je trouve que les hypotenuſes, ſçavoir, 5, 13, 17, &c. ſurpaſſent toutes de l'unité un multiple de 4, & que les derniers 3, 7, 11, &c. ſont tous moindres de l'unité qu'un multiple de 4, d'où on tirera ce théorême.

Tout nombre premier qui ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4, eſt hypotenuſe ; & tout nombre premier qui eſt hypotenuſe, ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4.

Par cette proprieté il ſera facile de réſoudre le pro-

blême, en diviſant le nombre donné en ſes parties s'il en a, & voyant ſi quelqu'une d'icelles eſt un nombre premier qui ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4.

Si on ſuppoſe que toute hypotenuſe primitive eſt la ſomme de deux quarrez de divers ordres, la conſequence eſt bien facile à tirer, que cette hypotenuſe ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4; car tout quarré impair ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4, (il n'eſt pas beſoin d'en excepter 1) & partant un quarré impair étant joint avec un pair, (qui eſt toûjours pairement pair) fera un pairement pair + 1.

Pour ce qui eſt de trouver le triangle, on verra par ce qui a été dit ſi le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, & on cherchera quels ſont leſdits quarrez, en ôtant dudit nombre le quarré prochainement moindre, & puis le ſuivant; & voyant à chaque ſouſtraction ſi ce qui reſte eſt quarré, ce qui eſt déduit ailleurs plus au long, & ayant les deux quarrez dont le nombre eſt la ſomme, on aura le triangle comme cy-devant.

La précedente perquiſition auroit pû être conduite d'une autre ſorte, car puiſqu'il faut que deux quarrez joints enſemble faſſent un quarré, je prendrai tous les quarrez l'un après l'autre, & verrai par le ſecond exemple quel quarré il lui faut ajoûter pour faire un autre quarré; car par ce moyen on auroit promptement les quarrez de toutes les hypotenuſes, tant primitives que multiples ſans en excepter aucune. Et afin de n'avoir point deux fois les mêmes nombres, il ne faudra remarquer que les quarrez qui ſont moindres que celui qu'on examinera.

Par exemple, ayant 16, ſon quart eſt 4; les parties rélatives de 4 ſont 1 & 4; leur difference eſt 3, qui eſt moindre que 4 racine de 16; & partant je retiendrai le quarré 9, qui étant joint à 16 donne 25, quarré de l'hypotenuſe 5.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

UN nombre composé étant dónné avec les parties premieres & analogiques, déterminer à combien de triangles il ſert d'hypotenuſe.

Puiſque le nombre eſt composé il ſervira d'hypotenuſe à quelques triangles multiples; & s'il eſt composé de ſeules hypotenuſes, il ſervira auſſi à des triangles primitifs: mais parce que les multiples proviennent néceſſairement de primitifs, on s'arrêtera premierement aux ſeuls primitifs.

Je trouve dans ma table quelques nombres compoſez, comme 25, 65, 85, & je trouve que 25 ne ſert qu'à un ſeul triangle primitif, non plus que les nombres premiers: mais 65 & 85 ſervent chacun à deux triangles primitifs.

Il faut donc qu'il y ait quelque reſſemblance entre 25 & les nombres premiers, qui ne ſoit pas entre 65 ou 85, & leſdits nombres premiers.

Je trouve que 25 ne peut être meſuré que par un ſeul nombre premier, non plus que les nombres premiers; mais 65 & 85 ſe meſurent chacun par deux nombres, celui-là par 5 & 13, & celui-ci par 5 & 17.

Et de-là il s'enſuivra que les puiſſances des nombres premiers ne ſerviront d'hypotenuſe qu'à un ſeul triangle primitif. Je l'examine à 125 & 625 puiſſances de 5, & je le trouve ainſi, car chacun deſdits nombres n'eſt qu'une ſeule fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux: d'où je conclus la verité dudit théorême.

Mais les nombres qui ſe meſurent par deux nombres premiers differens, (comme 65 qui ſe meſure par 5 & 13) ſervent d'hypotenuſe à deux triangles primitifs, puiſqu'ils ſont deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux.

De-là il s'enſuit que ſi on multiplie une hypotenuſe par un nombre qui la meſure, le produit ne ſervira pas d'hy-

potenuſe à plus de triangles primitifs ; par exemple, 325 ne doit ſervir d'hypotenuſe primitive qu'à deux triangles, non plus que 65 : car encore que 325 ſoit meſuré par 5 & 25,] & 65 par 5 ſeulement, néanmoins l'un & l'autre n'eſt meſuré que par les deux nombres premiers 5 & 13 ; joint que les quarrez & les autres puiſſances qui ont un nombre premier pour racine, ne ſervent d'hypotenuſe qu'à un ſeul triangle primitif.

Cette remarque ſera confirmée par l'examen qu'on fera de 325, par lequel on trouvera qu'il n'eſt que deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, & partant ne ſert d'hypotenuſe qu'à deux triangles primitifs.

Je compoſe par après un nombre de trois hypotenuſes premieres, & pour plus de facilité je prens les moindres, ſçavoir 5, 13, 17.

Leur produit eſt 1105, je regarde combien de fois il eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, ce qui ſe fera ôtant de 1105 le quarré prochainement moindre, ſçavoir 1089, le reſte ſera 16 qui eſt un quarré ; & partant 1105 eſt la ſomme des deux quarrez 1089. & 16.

J'ôte par après du même 1105 l'autre quarré précedent, ſçavoir 1024, reſte 81 qui eſt encore un quarré ; & ainſi continuant on trouvera que 1105 eſt quatre fois la ſomme de deux quarrez : d'où je conclus qu'il ſert d'hypotenuſe à quatre triangles primitifs.

On pourroit trouver leſdits quarrez d'une autre ſorte, ſçavoir ôtant le premier quarré 1089, & au reſte 16 ajoûtant 65, qui eſt la ſomme de 33 & 32, racines dudit 1089, & du quarré prochainement moindre.

Et à la ſomme 81 ajoûtant 63 qui eſt la ſomme des deux racines moindres chacune de l'unité que les précedentes, & ainſi continuant tant que ladite ſomme ſera moindre que le reſte, ce qui arrive à la derniere ſomme 529, qui étant ôtée de 1105 reſte 576 ; car ſi on paſſoit outre,

	16	4
	65	
	81	9
	63	

la ſomme ſeroit plus grande que le reſte.

Autant de fois qu'on a un quarré pour ladite ſomme, y comprenant même le premier nombre trouvé 16, autant de fois le nombre eſt la ſomme de deux quarrez : mais il faudra prendre garde s'ils ſont tous premiers entr'eux, ce qui ſe connoîtra ſi aucun d'iceux ne ſe meſure par quelqu'une des parties du nombre, qui ſont ici 5, 13, 17 : mais on a parlé de ceci ailleurs.

Je vois donc qu'un nombre qui ne ſe meſure que par un ſeul nombre premier, ne ſert d'hypotenuſe primitive qu'à un ſeul triangle. S'il ſe meſure par deux nombres premiers, il ſert à deux triangles. S'il ſe meſure par trois nombres premiers, il ſert à quatre triangles.

Il faut donc voir quel rapport 1, 2, 4, a avec 1, 2, 3.

Je vois que 1, 2, 3, ſe ſuivent en l'ordre des nombres, & 1, 2, 4, ſe ſuivent en l'analogie de 2 ; partant il faudroit que le nombre qui auroit quatre nombres premiers fût huit fois hypotenuſe, & celui qui en auroit cinq fût ſeize fois hypotenuſe : car de même que 4 eſt le troiſiéme nombre de l'analogie de 2, & partant a rapport à 3 ; de même 8 eſt le quatriéme, & 16 eſt le cinquiéme.

Pour s'aſſûrer davantage de cette verité, il faut rechercher quelle raiſon ou convenance on peut apporter de cette proportion.

Puiſque les nombres compoſez ſervent à plus de triangles que les premiers, il faut que cette augmentation provienne des parties. Or ces parties doivent être premieres entr'elles, autrement les puiſſances auroient plus de triangles que leurs racines.

Cela ne provient donc pas ſimplement de la multitude des parties, mais des parties premieres ſeulement : mais

144	12
61	
205	
59	
264	
57	
321	
55	
376	
53	
429	
51	
480	
49	
529	23

ces parties premieres ne doivent pas être priſes ſimplement ſelon leur multitude, puiſque la multitude des triangles n'eſt pas égale à la multitude deſdites parties premieres.

Reſte donc à conſiderer leſdites parties en tant qu'elles compoſent le nombre : il les faut donc prendre deux à deux, en telle ſorte toutefois qu'elles ſoient premieres entr'elles, car autrement elles ne donneroient pas des quarrez premiers entr'eux ; & parce qu'ayant pris une des parties, ſi on veut faire le nombre, l'autre partie vient néceſſairement enſuite, on nommera ces parties rélatives ; par exemple, ſi le nombre eſt 1105, dont les parties premieres ſont 5, 13, 17, quand on prendra 5 pour une des parties, on prendra 13 & 17, (c'eſt-à-dire le produit de 13 par 17) pour la partie rélative audit 5.

Il faut donc voir en combien de façons on peut faire chaque nombre par deux parties rélatives premieres entr'elles.

Et premierement les nombres premiers, & leurs puiſſances ne peuvent être faits que d'une ſorte, ſçavoir en prenant l'unité pour une des parties, & le nombre entier pour l'autre ; ainſi 5 ne peut être fait que par 1 & 5. La même choſe arrive aux puiſſances, car 125 cube de 5 ne peut auſſi être fait que d'une façon, ſçavoir par 1 & 125, car ſi on prenoit 5 & 25, les parties ne ſeroient pas premieres entr'elles ainſi qu'il eſt requis.

Les nombres qui ſont meſurez par deux nombres premiers comme 65, qui a 5 & 13 pour parties, peuvent être faits en deux façons, ſçavoir en prenant 1 d'un côté & le produit de 5 & 13 de l'autre, & en prenant 5 d'un côté & 13 de l'autre pour la ſeconde façon.

Le nombre qui a trois parties, comme 1105 qui a 5, 13, 17, ſe fait en quatre façons ; ſçavoir 1 par 5, 13 & 17,] 5 par 13 & 17,] 13 par 5 & 17,] 17 par 5 & 13.

Si le nombre avoit quatre parties premieres, comme

32045, qui a 5, 13, 17, 29, il ſe feroit en huit façons. On prendra 1 d'un côté, par 5, 13, 17 & 29, ou le nombre entier, puis 5 par 13, 17 & 29,] 13 par 5, 17, & 29,] 17 par 5, 13 & 29,] 29 par 5, 13 & 17,] 5 & 13 par 17 & 29,] 5 & 17 par 13 & 29,] 5 par 29, 13 & 17, qui ſont en tout huit façons de faire le nombre donné.

De la même maniere on trouvera 16 façons avec cinq parties, & trente-deux façons avec ſix, &c.

Ayant ainſi trouvé les primitifs, on viendra aux multiples, & pour les trouver il faudra compter les primitifs de chacune des parties: ainſi ayant 65 dont les parties ſont 5 & 13, chacune deſdites parties ſert à un primitif, & partant 65 ſervira à deux multiples, & en tout à quatre triangles.

Si on donnoit 325 dont les parties ſont 25, 13, de ces deux il faut faire toutes les autres, commençant par celles qui n'ont qu'une partie, & prenant auſſi leurs puiſſances, puis celles qui ont deux parties; & ainſi on aura 5, 25, 13 & 65, ou 5 par 13, les trois premieres donnent chacune un triangle, & la derniere qui a deux nombres differens en donne deux, & partant ledit 325 aura cinq multiples, qui avec les deux primitifs ſont en tout ſept triangles.

Ayant ces quantitez, je chercherai les moyens de trouver les autres ſans avoir la peine de les compter; & voici comment on raiſonnera pour cet effet..

La multitude des triangles auſquels un nombre ſert d'hypotenuſe, n'augmente pas pour la grandeur des parties, mais ſeulement pour leur multitude; par exemple, le nombre qui ſera fait de 13 & 17, n'aura pas plus de triangles que celui qui proviendra de 5 & 13, car l'un & l'autre n'a que deux nombres premiers: mais ſi on prenoit 325, qui eſt fait de 25 & 13, il aura plus de parties, & partant plus de triangles que 65, qui n'a que 5 & 13 comme on vient d'examiner; & partant cette multitude de

parties vient ou de la grandeur des puiſſances, ou de la multitude des parties premieres & de leurs puiſſances.

Il faudra donc dans l'examen prendre ſeulement le nombre qui dénote la puiſſance, ſans ſe ſoucier de quel nombre il eſt puiſſance, puiſque ſa quantité n'y fait rien.

Ayant donc trouvé que le produit de 5 par 13 a quatre triangles, je cherche les expoſans deſdites parties premieres, ou de leurs puiſſances; & je trouve 1 & 1 : je chercherai donc un moyen de rencontrer 4 par le moyen de 1 & 1.

Si je double chacun des expoſans 1 & 1, j'aurai 2 & 2, dont la ſomme ſera 4, qui eſt le nombre requis.

Il faut donc voir quelqu'autre exemple, pour voir ſi la même choſe arrivera.

325 a pour parties premieres & analogiques 25 & 13, & ſert d'hypotenuſe à ſept triangles.

Les expoſans deſdites parties ſont 2 & 1, il eſt manifeſte que le double d'iceux, ſçavoir 4 & 2 étans joints ne feront pas un nombre impair tel qu'eſt 7, & partant la régle premiérement trouvée n'eſt pas bonne. Il faudra donc chercher un autre rapport entre 1, 1 & 4.

Je trouve que le double du produit de 1 par 1, étant joint aux mêmes 1 & 1, donne 4.

La même choſe ſe fera en cherchant 7 par le moyen de 2 & 1, car le double du produit eſt 4, qui étant joint à 2 & 1 donne 7.

J'éprouverai encore cette régle ſur d'autres nombres, & je trouve qu'elle convient à tous.

Mais ſi le nombre ſe meſuroit par pluſieurs nombres premiers, & qu'il y en eût plus de deux, cela pourroit apporter quelque difficulté; par exemple, ſi on donnoit 1105 qui ſe meſure par 5, 13, 17, & qui a 1, 1, 1, pour expoſant de ſes parties; il faut par le moyen d'iceux trouver 13, car il ſert d'hypotenuſe à treize triangles.

Si on prenoit le double du produit des trois expoſans, &

& qu'on lui ajoûtât les trois expoſans, on n'auroit que 9 ; ce n'eſt donc pas la régle qu'il faut ſuivre.

Je prendrai donc les expoſans deux à deux, & premiérement avec 1 & 1 je trouverai 4. Je retiendrai ce 4 comme s'il étoit expoſant, & le comparerai avec le 1 qui reſte.

Le double du produit de 1 & 4 eſt 8, auquel joignant les mêmes 1 & 4, on aura 13 comme il eſt requis.

Pour s'aſſûrer davantage de cette régle, on prendra quelque grand nombre, comme le produit du cube de 5 par le quarré de 13 & par 17.

Les expoſans deſdites parties ſont 1, 2, 3.

Je prens le double du produit de 1 & 2, & lui ajoûte les mêmes 1 & 2 pour avoir 7.

A.	1	b. q. par C. cub.
B.	1	a. par b. par C. cub.
B. q.	1	a. par C. cub.
C.	1	a. par b. q. par c. q.
C. q.	1	a. par b. q. par C.
C. cub.	1	a. par b. q.
A. par B.	2	b. par C. cub.
A. par B. q.	2	C. cub.
A. par C.	2	b. q. par C. q.
A. par C. q.	2	b. q. par C.
A. par C. cub.	2	b. q.
B. par C.	2	a. par b. par C. q.
B. par C. q.	2	a. par b. par C.
B. par C. cub.	2	a. par b.
B. q. par C.	2	a. par C. q.
B. q. par C. q.	2	a. par C.
B. q. par C. cub.	2	a.
A. par B. par C.	4	b. par C. q.
A. par B. par C. q.	4	b. par C.
A. par B. par C. cub.	4	b.
A. par B. q. par C.	4	C. q.
A. par B. q. par C. q.	4	C.
A. par B. q. par C. cub.	4	0. primitifs.

Somme 52

Puis je prens le double du produit dudit 7 par 3 qui reſte, & lui ajoûte les mêmes 7 & 3 pour avoir 52.

Je dis donc que le nombre donné ſert d'hypotenuſe à cinquante-deux triangles.

Je chercherai par une autre voye ſi ledit nombre a cinquante-deux triangles, ſçavoir en comptant toutes ſes par-

ties, & les triangles primitifs qui appartiennent à chacune.

Pour faire cela plus aiſément, on prendra ſeulement les puiſſances, puiſque la diverſité des nombres premiers n'y fait rien.

Je poſe donc que le nombre ſoit A. par B. q. par C. cub.

Je conſidere leſdites parties en toutes les façons poſſibles, prenant premiérement celles qui ne ſervent qu'à un ſeul triangle primitif, ſçavoir celles où il n'y a qu'une ſeule puiſſance ou racine; puis celles qui ſeront faites de deux differentes puiſſances, & qui ſervent à deux triangles; & enfin celles qui contiennent trois puiſſances, & qui ſervent à quatre triangles comme on voit cy-deſſus.

Les parties ſont premiérement en groſſes lettres, puis enſuite la multitude des triangles primitifs de ladite partie. Et derriere en petites lettres eſt la partie rélative, qui eſt le nombre de multiplicité, ſçavoir le nombre par lequel le triangle eſt multiple. Par exemple A. par C. q. ſert à deux triangles primitifs, leſquels ſeront multipliez par b. q. par C. Et ſuppoſant que C. cub. ſoit 125, que B. q. ſoit 169, & que A. ſoit 17, on aura 425. Pour A. par C. q. qui ſervira d'hypotenuſe à deux triangles qu'il faudra multiplier par 845, qui eſt b. q. par C.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

UN nombre étant donné, déterminer combien de fois il eſt la ſomme de deux quarrez.

Il faut premiérement voir ſi on ne trouvera point quelque proprieté particuliere aux nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, afin qu'on puiſſe connoître plus facilement ſi le nombre eſt la ſomme de deux quarrez.

Si on n'avoit rien de connu, & qu'on ne ſçût point que la ſomme de deux quarrez inégaux eſt une hypotenuſe, il faudroit aſſembler les quarrez, & faire une table des ſommes, comme on voit au troiſiéme exemple.

Cela fait, je conſidere pluſieurs deſdites ſommes priſes de ſuite, comme 5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 41, 37, 40, 45, 52, 61, 50, 53, &c. & je regarde ſi elles n'ont rien de ſemblable entr'elles que les autres nombres n'ayent point.

Et parce que je vois diverſes ſortes de nombres, je les ſépare par claſſes ſelon leurs diverſitez.

Et premiérement, je trouve des nombres pairs & des impairs, des nombres premiers & des compoſez, des impairs premiers & des compoſez, des pairs dont les uns ſont pairement pairs, & les autres impairement pairs.

Je conſidére premiérement les nombres premiers comme les plus ſimples, & je trouve 5, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 53.

Je regarde quels ſont les autres nombres premiers non compris en cette table, & j'aurai 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59; j'examine s'il y a quelque difference entr'eux, & ſi les précedens ont quelque choſe qui ſoit commune à tous, & qui ne convienne à aucun des derniers.

Je trouve que 5, 13, 17, & les autres qui ſont la ſomme de deux quarrez, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4, ou bien qu'ils ſont pairement pairs +1, & les autres nombres, ſçavoir 3, 7, 11, &c. ſont tous pairement pairs −1.

Voilà pour ce qui eſt des nombres premiers.

Quant aux compoſez, puiſqu'ils ſont de diverſes ſortes, il faut voir d'où peut provenir cette diverſité, & ſi ce ne ſeroit point de la differente façon d'aſſembler les quarrez.

Et ſur cet aſſemblage, je trouve que les nombres premiers ſont tous faits de deux quarrez premiers entr'eux & de divers ordre.

Et que ſi on aſſemble deux quarrez impairs premiers entr'eux, on aura pour la ſomme un impairement pair qui ſera double d'un des nombres ci-deſſus pairement pair +1.

Et par les autres aſſemblages on trouvera les autres ſommes compoſées.

Il faudra par-après conſiderer les parties de ces nombres compoſez, & je trouve de deux ſortes de compoſitions; car les uns n'ont point d'autres parties que des nombres premiers pairement pairs +1, ou leurs puiſſances, comme 25, 65, 85. Les autres ont pour parties leſdits nombres premiers, & d'autres qui ſont pairement pairs —1, ou qui ſont de l'analogie de 2. Et conſiderant ces autres nombres qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, je trouve qu'ils ſont tous ou quarrez, ou doubles quarrez; par exemple, 10 a pour parties 2 & 5, deſquels 5 eſt la ſomme de deux quarrez, & 2 eſt double quarré.

20 a pour parties 4 & 5, deſquelles 4 eſt un quarré.

45 a pour parties 9 & 5, deſquelles 9 eſt quarré.

De là je conclurai que tout nombre premier pairement pair +1, eſt la ſomme de deux quarrez; & que leſdits nombres premiers étant multipliez par un quarré, ou par un double quarré, donnent des nombres qui ſont auſſi ſommes de deux quarrez.

Il faut maintenant conſiderer s'il peut y avoir des nombres qui ſoient pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez.

On voit par la table que leſdits nombres premiers ne ſont qu'une fois chacun la ſomme de deux quarrez.

Pour les nombres compoſez nous en avons remarqué de deux ſortes, dont les uns ſont multiples d'un nombre, qui eſt la ſomme de deux quarrez par un qui ne l'eſt point, comme 45 qui eſt multiple de 5 par 9, quand on ne verroit point par la table qu'il n'eſt point plus de fois la ſomme de deux quarrez que ſon primitif; la raiſon montre aſſez que 45, par exemple, dont les parties premieres & analogiques ſont 5 & 9, ne peut pas avoir plus de compoſitions que ſon primitif 5; car puiſque de ſes deux parties 5 & 9, l'une, ſçavoir 5, eſt la ſomme de deux quarrez, & l'autre qui eſt 9 ne l'eſt point, il eſt certain que ledit 9 ne

lui pourra communiquer ce qu'il n'a point ; mais ſeulement parce qu'il eſt quarré, il n'empêchera point que la proprieté de 5 ne paſſe en 45, puiſqu'un quarré multipliant un quarré fait un quarré, & auſſi 9 multipliant 4 & 1 dont la ſomme eſt 5, donnera les deux autres quarrez 36 & 9 dont la ſomme ſera 45, mais il ne lui pourra pas ajoûter de nouvelle compoſition, ni le faire être ſomme de deux autres quarrez que des multiples par 9, de ceux dont 5 eſt la ſomme.

Reſte donc que le nombre qui eſt pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez, ſoit compoſé de ſeuls nombres premiers pairement pairs +1, ou au moins qu'il ſoit multiple d'un nombre compoſé deſdits nombres premiers ſeulement.

Mais pour examiner les differens nombres compoſez, il faut commencer par les plus ſimples, ſçavoir par ceux qui ne ſe meſurent que par un ſeul nombre premier, comme ſont les puiſſances dont la racine eſt un nombre premier pairement pair +1.

Je trouve que 25 quarré de 5, n'eſt qu'une ſeule fois la ſomme de deux quarrez.

125 cube de 5 eſt deux fois la ſomme de deux quarrez.

625 qq. de 5 l'eſt auſſi deux fois.

Il ſera facile de voir combien de fois chacun de ces petits nombres eſt la ſomme de deux quarrez, en ôtant les quarrez moindres, comme on voit au quatriéme exemple.

Or on voit que chacun deſdits nombres qui ſont puiſſances d'un nombre premier, n'eſt qu'une ſeule fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux ; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à voir combien de fois il eſt la ſomme de deux quarrez compoſez entr'eux, c'eſt-à-dire, qui ont une commune meſure ; ce qui ſe fera aiſément comme il s'enſuit.

Il faut voir combien de fois le nombre ſe peut diviſer en deux parties, dont l'une ſoit un quarré, & compter combien de fois chacune des ſommes rélatives eſt la ſom-

me de deux quarrez premiers entr'eux ; car autant de fois le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez multiples, & qui ont l'autre partie rélative, qui eſt un quarré pour commune meſure.

Par-là on voit qu'un quarré, dont la racine eſt un nombre premier, n'eſt qu'une fois la ſomme de deux quarrez non plus que ſa racine. Que le cube & le qq. ſont chacun deux fois la ſomme de deux quarrez.

Que la cinquiéme & ſixiéme puiſſance ſont chacune trois fois la ſomme de deux quarrez, & ainſi continuant.

D'où il ſera facile de faire une régle pour trouver combien de fois chaque puiſſance, dont la racine eſt un nombre premier, eſt la ſomme de deux quarrez ; ſçavoir en prenant les expoſans deſdites puiſſances, & conſiderant de quelle façon on tirera 1 des expoſans 1 & 2, & comment on aura 2 par 3 & 4, &c. Car on voit que ſi on prend la moitié de l'expoſant lorſqu'il eſt pair, ou le milieu lorſqu'il eſt impair, on aura ce qu'on cherche.

Il faut maintenant voir ce qui appartient aux nombres qui ſont meſurez par pluſieurs nombres premiers, qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4.

Je trouve dans la table 65 & 85, dont le premier a 5 & 13 pour parties, & le ſecond 5 & 17, & chacun deſdits nombres eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux. Pour des quarrez multiples il n'y en a point, parce qu'aucun deſdits nombres n'a de quarré pour partie.

On trouvera auſſi que ſi le nombre donné a pour parties trois nombres premiers comme 1105, qui eſt produit par 5, 13, 17, il ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, comme on a vû au quatriéme exemple, & il ne peut être la ſomme de deux quarrez multiples, parce qu'il n'a point de partie quarrée. On verra audit quatriéme exemple combien de fois chaque nombre eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, car ils le ſont autant de fois qu'ils ſont hypotenuſes primitives, comme il a été dit.

Mais ſi le nombre donné peut être meſuré par quelque quarré, il ſera la ſomme de quarrez multiples autant de fois que la partie rélative eſt la ſomme de deux quarrez primitifs. Et pour avoir une régle par laquelle je puiſſe trouver la multitude des couples de quarrez, ſans avoir la peine de les déchifrer tous par la conſideration de toutes les parties quarrées; je chercherai, par ce qui a été dit, la multitude des couples de quarrez de pluſieurs nombres, & après en avoir quelques-uns, je verrai quelle régle on pourra donner qui leur convienne à tous; & afin d'éviter la difficulté de cette recherche, je choiſirai les moindres nombres, ſçavoir ceux qui ne ſont meſurez que par deux nombres premiers.

Ainſi je trouve qu'un nombre compoſé de deux nombres premiers, comme 65, dont les parties ſont 5 & 13, eſt deux fois ſeulement la ſomme de deux quarrez.

Si les parties du nombre ſont un quarré & une racine, il ſera trois fois la ſomme de deux quarrez, car il aura deux primitifs & un multiple.

Si les parties ſont un cube & une racine, il ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez.

Si les parties ſont un quarré quarré & une racine, il ſera cinq fois.

Si les parties ſont deux quarrez, il ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez.

Si c'eſt un quarré & un cube, il ſera ſix fois, &c.

Je vois ici que la grandeur des parties ne fait rien à la multitude des couples de quarrez; par exemple, 17 ou ſon quarré 289, pour être plus grand que 5 ou ſon quarré 25, n'eſt pas pour cela plus de fois la ſomme de deux quarrez; mais l'augmentation des puiſſances augmente cette multitude: ainſi une cinquiéme puiſſance donne trois couples, & un quarré n'en a qu'une.

Il faudra donc conſiderer ſeulement leſdites puiſſances, leſquelles ſeront commodément repréſentées par leurs expoſans.

Digitized by Google

Je ferai donc une petite table des parties de quelques nombres, auſquelles on mettra les expoſans deſdites parties au lieu d'icelles parties, comme on voit ici.

Car par exemple, 1, 2 ſignifient que les parties du nombre ſont une racine, ou nombre premier, & un quarré; & enſuite on met 3 ſéparé d'une ligne, qui montre que le nombre dont les parties ſont un quarré, & un nombre premier, eſt trois fois la ſomme de deux quarrez.

Or voici comme on trouvera ladite multitude de couples de quarrez. Par exemple, on veut ſçavoir combien de fois un nombre, dont les parties ſont un quarré & une cinquiéme puiſſance, eſt la ſomme de deux quarrez.

Premiérement, parce qu'il ſe meſure par deux nombres premiers, je conclus qu'il eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux.

1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
2	2	4
2	3	6
2	4	7
2	5	9
2	6	10
3	3	8
3	4	10
3	5	12
3	6	14

Reſte donc à trouver les couples des quarrez multiples.

Pour les trouver je diviſe le nombre en deux parties rélatives, l'une deſquelles ſoit un quarré, & ce en toutes les façons poſſibles.

Pour le faire avec plus de facilité, je nommerai les parties, que l'une ſoit A. q. & l'autre B. cinquiéme puiſſance.

Je prendrai donc A. q. pour une des parties rélatives; l'autre partie ſera B. cinquiéme puiſſance, laquelle n'eſt qu'une fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, comme il a été dit, je marque donc 1 enſuite. Puis je prens B. q. pour une des parties: la rélative ſera A. q. par B. cube, qui

A. q.	--- B. 5me puiſſ.	1
B. q.	--- A. q. par B. cub.	2
B. qq.	-- A. q. par B.	2
B. q. par A. q.	--- B. cub.	1
B. qq. par A. q.	--- B.	1
	Somme	7

qui eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux : je marque donc 2 enſuite.

Et ainſi continuant à prendre les parties quarrées comme on voit ici, on aura les primitifs de la partie rélative, qui donneront autant de multiples au nombre total, puiſque les quarrez primitifs appartenans à la ſeconde partie, ſont tous deux multipliez par la premiere partie qui eſt un quarré.

On aura donc 7 multiples, qui étant joints aux deux primitifs, qui ſont particulierement affectez au nombre total, font en tout 9 couples de quarrez dont la ſomme eſt ledit nombre qui a pour parties un quarré & une cinquiéme puiſſance.

Il faut donc de la multitude des couples de pluſieurs nombres inferer quelque régle pour trouver ladite multitude.

Or je ne trouve point de régle par laquelle je puiſſe trouver à tous la multitude des quarrez par l'inſpection des expoſans des puiſſances deſdites parties.

Auſſi leſdits expoſans n'expriment pas ladite multitude de couples de quarrez, comme ils faiſoient aux hypotenuſes pour en exprimer la multitude. Car, par exemple, une cinquiéme puiſſance eſt bien cinq fois hypotenuſe, mais elle n'eſt que trois fois la ſomme de deux quarrez, & une ſixiéme puiſſance qui eſt ſix fois hypotenuſe, n'eſt auſſi que trois fois la ſomme de deux quarrez.

Expoſans.				
1	1	1	1	2
1	2	1	1′	3
1	3	1	2	4
1	4	1	2′	5
1	5	1	3	6
2	2	1′	1′	4
2	3	1′	2	6
2	4	1′	2′	7
2	5	1′	3	9
2	6	1′	3′	10
3	3	2	2	8
3	4	2	2′	10
3	5	2	3	12
3	6	2	3′	14

On mettra donc la multitude deſdites couples de quarrez enſuite des expoſans, comme on voit ici, pour s'en ſervir au lieu deſdits expoſans.

Mais parce que les puiſſances dont l'expoſant eſt pair, n'ont pas une plus grande multitude de couples de quarrez que la précédente puiſſance dont l'expoſant eſt impair ; il ſemble qu'il eſt à propos de ne pas obmettre cette condition, & partant je marque d'un accent le nombre de multitude appartenant aux puiſſances paires.

Ainſi enſuite des expoſans 1, 2, je mets les nombres de multitude 1, 1′ ; & après les expoſans 2, 4, je mets 1′, 2′, & je me ſervirai deſdits nombres de multitude 1, 1′, pour trouver 3 qui eſt enſuite ; & de 1′, 2′, pour trouver 7 qui eſt après.

Mais parce que je voi que les mêmes nombres de multitude qui appartiennent aux expoſans ne donnent pas le même nombre de multitude pour le nombre donné, & que ceux qui ſont marquez, ſçavoir ceux dont l'expoſant eſt pair, donnent un plus grand nombre que ceux dont l'expoſant eſt impair ; il eſt manifeſte qu'il faut avoir égard à la qualité des expoſans, ce qui conſiſte à voir s'il eſt pair ou impair ; car, par exemple, 1, 2, provenans de 1 & 3 donnent 4 ; mais les mêmes 1, 2′, provenans de 1, 4, donnent 5 ; & ſi les mêmes 1′, 2, viennent de 2, 3, ils donneront 6 ; & venant de 2, 4, ils donneront 7.

Expoſans.				
1	1	1	1	2
1	2	1	1′	3
1	3	1	2	4
1	4	1	2′	5
1	5	1	3	6
2	2	1′	1′	4
2	3	1′	2	6
2	4	1′	2′	7
2	5	1′	3	9
2	6	1′	3′	10
3	3	2	2	8
3	4	2	2′	10
3	5	2	3	12
3	6	2	3′	14

De là on voit manifeſtement qu'on ne peut donner une même regle generale, puiſque les mêmes nombres 1, 2, donnent quatre nombres differens ; mais il faudra diſtinguer ſi les expoſans dont leſdits 1, 2, ou autres nombres ſont dérivez, ſont pairs ou impairs.

Cette diverſité ſe peut conſidérer en trois façons : car ou les deux expoſans ſont tous deux impairs, ou ils ſont

tous deux pairs, ou l'un eſt pair & l'autre impair.

Je chercherai donc ſéparément des regles pour chacune de ces trois façons.

Et premierement quand les expoſans ſont tous deux impairs. Le premier exemple de la Table eſt quand les expoſans des parties du nombre donné ſont 1, 1, les nombres de multitude qui leur appartiennent ſont auſſi 1, 1; je regarde comment je ferai 2 avec 1, 1, & je voi que ſi on prend la ſomme deſdits 1 & 1 on aura 2.

Je prens un autre exemple, ſçavoir le troiſiéme où les expoſans ſont 1, 3, & leur nombre de multitude ſont 1, 2: or la ſomme de 1, 2, n'eſt pas 4 ainſi qu'il ſeroit requis, & partant ce n'eſt pas là la regle.

Je chercherai donc 2 avec 1 & 1 d'une autre ſorte, & je trouve que le double du produit de 1 par 1 eſt 2.

Et conſidérant les autres exemples où les deux expoſans ſont tous deux impairs, je trouve les nombres qui appartiennent à chacun d'iceux en la même ſorte; car le double du produit de 1, 2, qui appartiennent à 1, 3, eſt 4, & ainſi des autres; d'où je conclus que la regle eſt bonne.

Je paſſe aux expoſans qui ſont tous deux pairs. Le premier exemple eſt celui dont les expoſans ſont 2 & 2, leurs nombres ſont 1′, 1′, (ſçavoir la moitié d'iceux, & aux expoſans impairs le milieu,) je cherche le moyen de faire 4 avec 1 & 1.

Pour ſuivre le plus que je pourrai la premiere méthode, il faudra que je prenne le produit de 1 par 1, lequel eſt 1 dont le quadruple ſera 4. Mais il n'en ira pas de même aux expoſans 2 & 4, car les nombres qui leur appartiennent ſçavoir 1′ & 2′, donneroient 8, & non pas 7, ainſi qu'il eſt requis.

J'eſſayerai donc à faire 4 par le moyen des mêmes 1′ & 1′ du premier exemple d'une autre façon, en ſuivant encore le plus que faire ſe pourra la premiere méthode.

On prendra donc encore le produit de 1 par 1, lequel

eſt 1 ; ſon double eſt 2 , auquel joignant les mêmes 1 & 1, on aura 4 , ainſi qu'il eſt eſt requis.

Je prens enſuite les expoſans 2 & 4 : les nombres qui leur appartiennent, ſçavoir leur moitié eſt 1 & 2 , leur produit eſt 2 dont le double eſt 4 , auquel joignant les mêmes 1 & 2 , on aura 7 , qui eſt le nombre qu'il falloit avoir.

J'éprouve la même choſe aux expoſans 2 & 6, & trouve 10 , d'où je conclus que la regle eſt bonne.

Je paſſe par après à la troiſiéme diſtinction , ſçavoir quand l'un des expoſans eſt pair , & l'autre impair. Le premier exemple eſt quand les expoſans ſont 1 & 2 , leur milieu & moitié ſont 1 & 1′ , avec leſquels il faut trouver 3. Je prens comme auparavant le produit de 1 par 1 , qui eſt 1 , ſon double eſt 2.

Or puiſque les deux expoſans étant impairs on prend ſimplement le double du produit ſans rien ajouter , & lorſque leſdits expoſans ſont tous deux pairs on ajoute au double du produit les deux nombres qui ſe ſont multipliez , il ſe pourra faire que quand l'un des expoſans eſt pair & l'autre impair , il faudra ſeulement ajouter un des nombres au double du produit ſuſdit.

Partant audit produit 2 j'ajoute l'un des nombres , ſçavoir 1 pour avoir 3.

Mais parce que chacun des nombres qui ſe ſont multipliez eſt 1 , je ne puis encore ſçavoir ſi c'eſt celui qui vient de l'expoſant pair , ou celui qui vient de l'impair.

Je prens donc un autre exemple , ſçavoir le ſuivant auquel les expoſans ſont 1 & 4. Les nombres qui en dépendent ſont 1 , 2′ , le double de leur produit eſt 4 ; mais parce qu'il faut avoir 5 , on ajoutera 1 audit 4 : or cet 1 eſt le nombre qui provient de l'expoſant impair ; je dirai donc qu'au double du produit il faut ajouter le milieu de l'expoſant impair.

Je regarde aux autres exemples ſi la même choſe arri-

vera comme à ceux dont les expoſans ſont 1, 6,] 2, 3,] 2, 5, &c. & je trouve que cette regle convient à tous, d'où je conclus qu'elle eſt bonne.

Il faut maintenant voir quand le nombre donné ſera meſuré par trois nombres premiers differens; par exemple, ſi ſes parties ſont un nombre premier, un quarré & un cube, leſquelles ſoient A. B. q. & C. cub.

Je les mets en deux parties rélatives, en telle ſorte que l'une ſoit un quarré, & je prens	B. q. ---- A. par C. cub.	2
	C. q. ---- A. par C. par B. q.	4
	B. q. par C. q. ---- A. par C.	2

les primitifs de la partie rélative au quarré que je mets enſuite. Par exemple, prenant C. q. pour une des parties, la rélative ſera A. par C. par B. q. laquelle contenant trois ſortes de nombres premiers, elle ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux; je mets donc 4 enſuite, & ainſi des autres.

Et aſſemblant tous leſdits primitifs des parties qui ſeront multiples au nombre total, je trouve huit multiples, auſquels joignant les quatre primitifs dudit nombre total, on aura en tout douze couples de quarrez, deſquels le nombre donné eſt la ſomme.

Il faut donc trouver 12 par le moyen des expoſans 1, 2, 3, ou des nombres qui leur appartiennent 1, 1′, 2.

Et premierement de 1 & 1′ j'ai 3. Je prendrai donc 3 au lieu de 1, 1′, & ainſi j'aurai 3 & 2 : leur produit eſt 6 dont le double eſt 12, qui eſt la multitude requiſe des couples de quarrez.

On pourroit ici trouver quelque difficulté ſur le 3 qui provient de 1 & 1′, ſçavoir s'il doit être pris comme venant d'un expoſant pair ou d'un impair, puiſqu'il provient de tous les deux enſemble; mais la regle nous montre que l'impair prévaut ici, car autrement il faudroit ajouter un des nombres au double du produit 12.

Mais ici il faut conſidérer que l'expoſant pair montre

que l'expoſé eſt quarré, & l'expoſant impair montre que l'expoſé n'eſt pas quarré: ſi donc le nombre de multitude eſt celui qui provient de pluſieurs expoſans, ou qui eſt la moitié ou milieu d'un deſdits expoſans, ce nombre de la multitude appartient à un nombre quarré, & il doit être réputé provenir d'un pair: mais ſi ledit nombre de multitude appartient à nombre non quarré, il doit être réputé comme provenant d'un impair. Si donc entre les parties analogiques d'un nombre, il s'en trouve une qui ne ſoit point quarrée, le nombre ne ſera point quarré, & les parties non quarrées auront leurs expoſans impairs.

D'où il s'enſuit qu'entre pluſieurs expoſans, s'il y en a quelqu'un qui ſoit impair, le nombre qui eſt produit par les parties à qui appartiennent leſdits expoſans, ſuit la loy des expoſans impairs.

Ainſi en notre exemple, ayant premierement travaillé ſur les expoſans 1 & 2, qui donnent 3 pour le nombre de la multitude, ledit 3 doit être réputé comme provenant d'un expoſant impair, parce qu'entre les expoſans dont il provient il y en a un impair, ce qui fait que le nombre qui eſt trois fois la ſomme de deux quarrez n'eſt pas quarré, & partant ſon expoſant doit être réputé impair.

On trouvera le même nombre 12 en mêlant autrement leſdits expoſans. Comme ſi je multiplie à part les nombres 1, 2, provenans des expoſans 1 & 3, j'aurai 4. L'autre expoſant eſt 2, ſon nombre eſt 1′, je multiplie donc 1′ par 4, le produit eſt 4, dont le double eſt 8, auquel il faut ajouter le nombre qui provient de l'expoſant impair, ſçavoir 4, puiſque l'autre nombre 1′ provient d'un expoſant pair, & on aura 12 comme cy-devant.

SIXIE'ME EXEMPLE.

TRouver tous les triangles qui ont un nombre donné pour difference de leurs moindres côtez.

Afin de trouver tout ce qui dépend de la connoiſſance

des nombres qui ſervent de difference aux côtez des triangles, je fais pluſieurs triangles primitifs de ſuite, & je prens leur difference, en laiſſant les multiples, parce qu'ils ne peuvent rien avoir qui ne vienne des primitifs.

On voit ici tous les triangles primitifs dont les hypotenuſes ſont moindres que 100, & après eux eſt la difference de leurs moindres côtez.

3	4	5	1
5	12	13	7
8	15	17	7
7	24	25	17
20	21	29	1
12	35	37	23
9	40	41	31
28	45	53	17
11	60	61	49
16	63	65	49
33	56	65	23
48	55	73	7
13	84	85	71
36	77	85	41
39	80	89	41
65	72	97	7

Or pour remarquer ce qu'il y a de particulier dans leſdits nombres qui ſervent de difference, je trouve qu'ils ſont premiers ou compoſez de nombres que je trouve auſſi dans la Table, comme 49 qui eſt le quarré de 7; de plus ces nombres premiers (ſi on en excepte 1) ſont tous differens de l'unité d'un multiple de 8, & je ne trouve aucun nombre dans ladite Table qui n'ait cette condition.

Maintenant il faut voir comment on pourra trouver tous les triangles, la difference des moindres côtez étant donnée.

Je prendrai par exemple 7, & par ſon moyen je chercherai une regle pour trouver les triangles 5, 12, 13 & 8, 15, 17. Mais parce que 7 eſt nombre premier, & qu'il ſert de difference à pluſieurs triangles, il faut de néceſſité qu'il y ait quelqu'autre proprieté par laquelle on puiſſe trouver leſdits triangles, autrement ils ne ſe pourroient pas trouver; car quoique je ſçache que 7 eſt different de l'unité d'un multiple de 8, cela ne me donne autre choſe, ſinon que 7 eſt proche du premier octonaire, ce qui ne pourra pas ſuffire pour trouver les deux triangles ſuſdits, & les autres qui ſont encore enſuite.

Or en conſidérant 7, je voi qu'il eſt la difference entre 1 & 8, & entre 2 & 9, ſçavoir entre un quarré & un double quarré. Je regarderai donc ſi les autres nombres qui ſervent de difference entre les moindres côtez d'un triangle ſont auſſi la difference d'un quarré & d'un double quarré.

Et ſans examiner 1 qui ſert de difference entre 1, 2, & 8, 9, & autres, je viens à 17 qui ſert de difference entre 1 & 18, & entre 8 & 25; de même 23 ſert de difference entre 2 & 25, & entre 9 & 32, & chacune deſdites couples contient un quarré & un double quarré.

De plus, je remarque qu'à chacune de ces couples il y a un des nombres moindres que la difference d'entr'eux; ainſi à la couple 9, 32, le moindre nombre 9 eſt moindre que 23 qui en eſt la difference.

Je verrai donc ſi par cette proprieté je trouverai que 7 eſt la difference entre les moindres côtez des deux triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17.

Voici comme il faut s'y prendre.

7 ſert de difference entre 1 & 8, & entre 2 & 9. Je prens leurs racines qui ſont 1, 2″, & 1″, 3. Je marque les racines des doubles quarrez, afin de les connoître d'avec celles des quarrez, car on voit bien qu'il faut comparer la racine du double quarré avec le nombre dont elle provient d'une autre maniere que celle du quarré ſimple, & qu'elles doivent produire un effet different l'une de l'autre.

Je mets donc 7, & enſuite les racines des deux couples ſuſdites, comme on voit ici; ſçavoir 1, 2″, & 1″, 3.

7	1 2″	2 3
	1″ 3	1 4

Je conſidére par après les deux triangles qu'il faut trouver, ſçavoir 5, 12, 13, & 8, 15, 17, je prens les quarrez dont ils proviennent, qui ſont 4, 9; & 1, 16.

Leurs racines ſont 2 & 3,] & 1, 4, que j'écris auſſi enſuite.

Car

Car il faut remarquer que d'ordinaire la ſolution ſe trouve plus aiſément par le moyen des racines que par les quarrez, de ſorte que quand on aura des quarrez, ſi on ne trouve pas aiſément par leur moyen ce qu'on cherche, on l'éxaminera par les racines, ce qui ſert auſſi à rendre la recherche plus facile par la ſeptiéme regle, ſçavoir en ſe ſervant de moindres nombres.

Il faut donc par le moyen de 1, 2″, & 1″, 3, trouver 2, 3, & 1, 4, ſçavoir par les racines des quarrez & doubles quarrez dont 7 eſt la difference, trouver les racines des quarrez qui ſont les triangles qui ont 7 de difference entre leurs moindres côtez.

Je voi que 1″, 2″, ſont les racines des moindres quarrez deſdits triangles, & les deux grandes 3 & 4, ſe pourront trouver prenant en croix la ſomme de 1″, 2″, & de 1, 3.

On pourroit dire auſſi que la ſomme & la difference de 1′ & 3′, donnent 2 & 4, qui ſont les racines

7	1′	2″	2	3
	1″	3′	1	4

des quarrez pairs des triangles; & la ſomme & la difference de 1″, 2″, donnent 1 & 3, qui ſont les racines des quarrez impairs.

Mais on pourroit encore ſe ſervir d'une ſeule couple pour un triangle; ſçavoir ſi on prend la racine du double quarré pour une des racines, & la ſomme des deux pour l'autre.

Ainſi à la premiere couple 1′, 2″,] 2 ſera une des racines requiſes, & 3 qui eſt la ſomme de 1 & 2 ſera l'autre.

Et à l'autre couple 1″, 3′,] 1 ſera l'une des racines, & la ſomme de 1, 3, ſçavoir 4, ſera l'autre.

Et cette derniere façon ſi elle eſt bonne, comme il y a quelque apparence, ſera plus commode, puiſque chaque couple donne un triangle.

Ce qui me fait préſumer qu'elle eſt bonne, eſt que les autres ne peuvent pas ſervir pour les triangles qui ont 1 de

difference entre leurs côtez ; car 1 eſt la difference entre le quarré & double quarré 1, 2, le moindre deſquels ſçavoir 1 n'eſt pas plus grand que ladite difference 1.

Voici donc comme je l'éxaminerai à 1.

Les racines du quarré & double quarré ſuſdit ſont 1′ & 1″, donc 1 ſera une des racines, (ſçavoir prenant la racine du double quarré) & 2 qui eſt la ſomme des deux racines 1′ & 1″ ſera l'autre racine : on aura donc 1, 2, dont les quarrez 1, 4, donnent le triangle 3, 4, 5, qui a 1 de difference entre ſes moindres côtez.

Le même 1 eſt encore la difference entre le quarré, & le double quarré 8 & 9, dont les racines ſont 2″, 3′.

On aura donc pour les racines des quarrez 2 & 5, ſçavoir la racine du double quarré, & la ſomme des deux.

Leſdits 2 & 5 donneront le triangle 20, 21, 29, qui a 1 de difference entre ſes moindres côtez.

Il faut maintenant examiner les deux premieres regles ſur 17. Les quarrez & doubles quarrez dont il eſt la difference ſont 1, 18, & 8, 25. Leurs racines ſont 1′, 3″, & 2″, 5′.

Je les diſpoſe comme auparavant.

Par la premiere regle, je prendrai 3 & 2 pour les racines des moindres quarrez requis, & les ſommes de 2″, 3″, & de 1′, 5′, pour les autres ; mais on ne pourra pas faire par ce moyen les triangles requis, car on auroit les quarrez de 3 & 5, & de 2, 6, qui donneroient des triangles auſquels les trois côtez ſeroient pairs, & partant la difference qui ſeroit paire ne ſeroit pas 17.

17	1′	3″	3	5
	2′	5′	2	6

Que ſi on vouloit accoupler autrement 5 & 6, & qu'on prit 2, 5, & 3, 6, on n'auroit pas auſſi le triangle requis, car les quarrez de 3 & 6 étant multiples de 3, donneroient un triangle auquel tous les côtez ſeroient meſurez par 3, & partant la difference des côtez ne pourroit pas être 17, puiſqu'elle-même ſeroit auſſi meſurée par 3, & partant

la premiere façon de trouver les triangles n'eſt pas bonne. Venons à la ſeconde.

		1′	3″	4 5
17		2″	5′	1 6

La ſomme & la difference de 1′, 5′, ſont les racines des quarrez pairs, & la ſomme & la difference de 2″, 3″, ſont les racines des quarrez impairs: mais cette regle ne réüſſit pas non plus que la premiere, quoiqu'elle ait plus d'apparence d'être bonne, car par la premiere, après qu'on a pris 2″, 3″, pour les racines des moindres quarrez, on prend par après les ſommes de 2″, 3″, & de 1′, 5′, pour les racines des deux autres quarrez; d'avoir pris 2″ pour un triangle, & 3″ pour l'autre, cela va bien, parce qu'il y a de la reſſemblance entre 2″ & 3″: mais de prendre par après la ſomme de 2″, 3″, pour un des triangles, & celle de 1′, 5′, pour l'autre, ce ſont des façons differentes, parce que 2″, 3″, ſont racines de doubles quarrez, & 1′, 5′, de quarrez ſimples.

La ſeconde façon n'a pas cette répugnance, les racines de chaque triangle étant égales à la ſomme & à la difference de 1′, 5′, & de 2″, 3″; néanmoins parce que l'on prend pour le premier la difference des racines des quarrez ſimples & la ſomme de celles des doubles quarrez, & le contraire pour le ſecond triangle; cette diverſité fait qu'elle ne réüſſit pas.

La troiſiéme voye eſt plus réguliere, & les triangles ſe trouvent par des façons entierement ſemblables, auſſi eſt-ce la vraye méthode de trouver les triangles.

		1	3″	3 4
17		2″	5	2 7

On ſe ſert de chaque couple à part, prenant la racine du double quarré pour la moindre racine, & la ſomme des deux quarrez pour l'autre.

Ainſi 3 eſt la racine du moindre quarré d'un des triangles, & 4 qui eſt la ſomme de 3″ & 1, eſt l'autre racine.

Les deux racines ſont donc 3 & 4, qui donnent le triangle 7, 24, 25, qui a 17, pour difference de ſes côtez.

L'autre triangle ſe trouvera de la même maniere, ſçavoir prenant la racine du double quarré 2 pour celle du moindre quarré, & la ſomme de 2 & 5 ſçavoir 7, pour racine de l'autre quarré. On aura donc 2 & 7 pour racines, qui donnent le triangle 28, 45, 53, qui a 17 de difference entre ſes côtez.

La même choſe ſe fera aux autres nombres, car des couples de 23, ſçavoir de 3, 4″, & 1″, 5, on trouvera les triangles 33, 56, 65, & 12, 35, 37, qui ont 23 de difference entre leurs côtez.

23	3	4″	4	7
	1″	5	1	6
31	1	4″	3	5
	3″	7	3	10

Et des couples de 31 on trouvera les triangles 9, 40, 41, & 60, 91, 109, qui ont 31 de difference, d'où l'on peut inférer que la regle eſt bonne.

Voilà donc le moyen de trouver les triangles qui ont un nombre donné pour difference de leurs côtez, mais la queſtion demande tous leſdits triangles.

Il faut donc voir combien il y en doit avoir, & s'il y en a quelque nombre déterminé; & pour cet effet j'ai recours à la Table qu'on a faite en commençant d'éxaminer la queſtion, dans laquelle je voi qu'un même nombre ſert à pluſieurs triangles, car il y en a 4 qui ont 7 pour difference.

Je conſidére auſſi qu'il n'y a point de répugnance qu'un même nombre ſerve de difference aux moindres côtez d'une infinité de triangles, vû même qu'il y en a une infinité qui n'ont que 1 de difference entre le grand côté & l'hypotenuſe, & je conclus qu'il ſe pourroit bien faire auſſi qu'il y auroit une infinité de triangles qui auroient un même nombre pour difference de leurs moindres côtez.

Et ce qui me confirme en cette opinion, eſt que je voi quatre triangles qui ont un nombre premier, ſçavoir 7 pour difference. Or les nombres premiers ne ſont pas ſi abondans, lorſque la choſe eſt limitée; comme on voit que les

mêmes nombres ſont auſſi la ſomme des ſuſdits côtez des triangles : mais parce que cela eſt limité, & qu'il eſt impoſſible qu'ils ſoient la ſomme des côtez d'une infinité de triangles, on voit que les nombres premiers comme 7, 17, &c. ne ſont chacun la ſomme des côtez que d'un ſeul triangle.

Or ſi chaque nombre ſert de difference entre les moindres côtez d'une infinité de triangles, il eſt néceſſaire qu'il y ait quelque progreſſion qui conduiſe à cette infinité de triangles ; & s'il y a une progreſſion, & qu'on ſçache les deux moindres termes, & la difference des nombres de ladite progreſſion, on la pourra pourſuivre auſſi loin qu'on voudra.

Je cherche donc dans ma Table deux triangles qui ayent une même difference entre leurs moindres côtez, & je prens les triangles les plus proches. Ainſi 5, 12, 13, & 8, 15, 17, ont tous deux 7, de difference entre leurs côtez.

Il faudroit voir ſi on pourroit avec le moindre faire le plus grand : mais parce que les racines des quarrez qui font le triangle ſont plus ſimples que les côtez du même triangle, je prens leſdites racines qui ſont 2, 3, & 1, 4 ; mais on ne peut pas trouver une ſuite qui avec 2, 3, donne 1, 4, ou avec 1, 4, donne 2, 3, & qui continuë à l'infini en augmentant : car ſi on prend 2, 3, pour le premier terme, & qu'on trouve 1 au ſecond, cela iroit en diminuant ; de même qui prendroit 1, 4, pour le premier, le ſecond auroit 3 pour ſa plus grande racine qui ſeroit moindre que la plus grande du précédent, & ainſi on iroit encore en diminuant.

Il faut donc afin que la progreſſion aille en augmentant, que chacun des termes augmente, ou au moins que le grand terme augmente, & que le moindre ne diminuë point.

Je conclus de là que les deux triangles ſuſdits ſont

chacun le commencement de quelque progreſſion.

Il faut donc prendre dans la table quelqu'autre triangle plus grand qui ait pareil nombre de 7, pour difference entre ſes moindres côtez. Je trouve 48, 55, 73.

Les racines des quarrez dont il provient ſont 3 & 8.

Mais parce qu'on ne voit pas d'où peut provenir ce 3 & 8, ſçavoir ſi c'eſt de 2, 3, ou de 1, 4, je choiſirai plûtôt dans la table une autre difference pour l'examiner, puiſque j'y vois deux triangles aſſez éloignez l'un de l'autre qui ont chacun l'unité pour difference entre leurs côtez.

Joint auſſi que pour plus grande facilité la méthode requiert qu'on ſe ſerve du moindre nombre poſſible en l'examen. Mais (pour retourner à notre 7) ſi on vouloit juger duquel des deux triangles dépend 48, 55, 73, ſçavoir ſi c'eſt de 5, 12, 13, ou de 8, 15, 17, il faudroit voir ſi c'eſt le premier qu'on rencontre après les deux ſuſdits, & s'il n'y en a point dont les côtez ſoient moindres, & parce que je trouve que c'eſt le moindre après les deux ſuſdits, je conclurai qu'il provient du moindre des deux premiers, ſçavoir de 5, 12, 13, qui eſt moindre que 8, 15, 17.

Je trouve donc 3, 4, 5, qui a 1 de difference, & enſuite 20, 21, 29. Les racines de leurs quarrez ſont 1, 2, & 2, 5.

Je les diſpoſe comme on voit ici, & je regarde comment je pourrai de 1, 2, tirer 2, 5. Et premierement je vois que le moindre nombre de la ſeconde couple eſt égal au plus grand de la premiere, car chacun d'iceux eſt 2.

1	2
2	5
5	12

Reſte donc à faire 5 avec 2, & 1. Le 5 eſt la ſomme des trois nombres que j'ai déja, ſçavoir de 2, 2, & 1, ou (ce qui eſt la même choſe) il eſt la ſomme du moindre nombre 1, & du double de 2 qui eſt le plus grand.

Je continuë par-après cette progreſſion de la même ſorte, prenant le plus grand nombre 5 pour le moindre de la couple ſuivante, & pour avoir le plus grand j'ajoûte 2 au double de 5 pour avoir 12.

1	2	3	4	5
2	5	20	21	29
5	12	119	120	169
12	29	696	697	985

J'ai donc 5 & 12 dont les quarrez donnent le triangle 119, 120, 169, qui a 1 de difference entre ſes moindres côtez.

De la même façon avec 5 & 12, on fera 12, 29, qui donneront le triangle 696, 697, 985.

J'appliquerai par-après cette méthode aux autres nombres.

2	3	5	12	13		1	4	8	15	17
3	8	48	55	73		4	9	65	72	97
8	19	297	304	425		9	22	396	403	565

Et avec 2, 3, je ferai les racines 3 & 8, prenant 3 pour la moindre, & la ſomme de 2, & du double de 3 pour la plus grande, qui donneront le triangle 48, 55, 73.

Et avec 3 & 8, on fera 8 & 19, & ſon triangle 297, 304, 425.

Semblablement avec 1 & 4 on fera 4 & 9 & ſon triangle 65, 72, 97, & avec 4 & 9, on fera 9, 22, & ſon triangle 396, 403, 565.

Et ainſi à toutes ſortes de nombres, pourvû qu'on ſçache un des triangles, on trouvera les autres, mais il faut auſſi avoir égard aux multiples.

Or ces multiples ſont faciles à trouver quand on ſçait les primitifs, & ce qu'on doit ici remarquer eſt que tout nombre excepté 1, ſert de difference entre les moindres côtez d'un infinité de triangles multiples, parce que tout nombre eſt multiple de 1, lequel 1 ſert de difference entre les moindres côtez d'un triangle.

Ainſi 7 ſert de difference entre les côtez des triangles.

5, 12, 13, & 8, 15, 17, & de ceux qui en proviennent; mais outre cela parce que 7 eſt multiple de 1, il ſera encore la difference des côtez des triangles multiples par 7, de 3, 4, 5, de 20, 21, 29, & de leur ſuite; ſçavoir de 21, 28, 35,] 140, 147, 203, & des autres.

Il en eſt de même des autres nombres, & s'ils étoient compoſez, il y auroit beaucoup plus de multiples; au moins il y auroit plus de principes dont ils proviennent.

Il y a pluſieurs autres choſes à conſiderer ſur ce ſujet, dont on a parlé au diſcours des triangles au chapitre qui traite de la ſomme & de la difference des deux moindres côtez : mais ceci ſuffira pour faire découvrir le reſte.

TROUVER UN TRIANGLE auquel tant l'hypotenuſe que la ſomme des deux autres côtez ſoit un quarré.

Voici le triangle.

4687298610289 hypotenuſe.
4565486027761 côté impair.
1061652293520 côté pair.

C'eſt la queſtion que l'exemple 7 ſuivant nous enſeigne à chercher par tant de moyens.

TROUVER UN TRIANGLE duquel l'aire ajoûtée aux deux petits côtez faſſe un quarré.

Voici le triangle.

205769.
190281.
78320.

TROUVER UN TRIANGLE dont l'aire jointe à l'hypotenuſe donne un quarré.

C'eſt 17, 144, 145.

TROUVER

TROUVER UN TRIANGLE dont l'aire jointe au petit côté faſſe un triangle.

C'eſt 3, 4, 5,] 16, 30, 34.
Et le troiſiéme eſt 105, 208, 233.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

TROUVER un triangle auquel tant l'hypotenuſe que la ſomme des deux autres côtez ſoit un quarré.

Puiſque la queſtion requiert deux choſes, ſçavoir l'hypotenuſe quarrée & la ſomme des deux côtez auſſi quarrée, je chercherai les moyens de faire chacun ſéparément, & je verrai ſi l'un étant quarré l'autre le peut être auſſi, ſuivant ce qui a été dit au neuviéme précepte.

Je chercherai premiérement tous les triangles qui ont un quarré pour la ſomme de leurs moindres côtez.

Je ſuppoſe donc qu'on ait examiné quels nombres doivent être la ſomme des deux moindres côtez des triangles, & qu'on ait trouvé que ce ſont des nombres premiers differens de l'unité d'un multiple de 8, ou qui ſont compoſez deſdits nombres premiers ſeulement.

Je prens donc les quarrez deſdits nombres, ſçavoir de 7, 17, 23, 31, &c. & je cherche leurs triangles pour voir ſi quelqu'un d'entr'eux aura un quarré pour ſon hypotenuſe.

Pour avoir leſdits triangles il faut avoir les couples de quarrez & doubles quarrez, dont la difference eſt la ſomme des deux moindres côtez du triangle. Et parce que tous les nombres dont on ſe doit ſervir ſont quarrez, il faut voir ſi par le moyen de leurs racines, on ne pourra point trouver les couples de quarrez, & doubles quarrez qui leur appartiennent.

Pour trouver cela on ſe ſervira des méthodes ordinaires, prenant des nombres connus; par exemple, je ſçais que 7 eſt la difference de 1, 8, & de 2, 9, dont les racines

ſont 1, 2″, & 1″, 3. Je ſçais auſſi que ſon quarré 49 eſt la difference de 1, 50, & de 32, 81, dont les racines ſont 1, 5″, & 4″, 9.

1	2″	1	5″
1″	3	4″	9

Il faut donc par le moyen de 1, 2″, & 1″, 3, trouver 1, 5″, & 4″, 9. On donneroit bien pluſieurs moyens de paſſer de l'un à l'autre, mais ils ne conviennent pas aux autres nombres. En voici un qui convient à tous.

Je prens le produit des deux couples, ſçavoir de 1 par 2, & de 1 par 3, pour avoir 2 & 3. Leur ſomme eſt 5 qui eſt le côté du double quarré, leur difference eſt 1 qui eſt le côté du quarré de la même couple. On aura donc 1, 5″, pour une des couples.

L'autre ſe trouvera aiſément, ſçavoir en prenant la difference de 1 & 5 pour côté du double quarré de l'autre couple, & la ſomme des racines des doubles quarrez, ſçavoir de 4″ & 5″ pour la racine du quarré de ladite ſeconde couple.

On aura donc ainſi les deux couples, 1, 5″, & 4″, 9.

J'éprouve la même choſe aux autres nombres comme 17 & 23, & je trouve que cela y revient.

Je fais donc une table aſſez grande de pluſieurs quarrez qui ſont la ſomme des deux moindres côtez d'un triangle, comme on peut voir ci-après; & afin de trouver commodément les couples de quarrez & doubles quarrez dont ils ſont la difference, je mets leurs racines avec leurs couples auſſi; comme près de 49 je mets 7 avec ſes couples 1, 2″, & 1″, 3, afin qu'on puiſſe trouver plus facilement les couples de 49 par le moyen de celles de 7, car les racines étant moindres que leurs quarrez, leurs couples ſe trouveront auſſi plus facilement que celles des quarrez.

TABLE DES QUARREZ
qui ſont la ſomme des moindres côtez des triangles.

7		49		79		6241		151		22801	
1	2″	1	5″	7	8″	47	65″	7	10″	31	109″
1″	3	4″	9	1″	9	18″	83	3″	13	78″	187
17		289		89		7921		161		25921	
1	3″	7	13″	3	7″	23	65″	1	9″	127	145″
2″	5	6″	19	4″	11	42″	107	8″	17	18″	163
23		529		97		9409					
3	4″	7	17″	1	7″	71	85″	9	11″	73	125″
1″	5	10″	27	6″	13	14″	99	2″	13	52″	177
31		961		103		10609		167		27889	
1	4″	17	25″	5	8″	7	73″	11	12″	119	145″
3″	7	8″	33	3″	11	66″	139	1″	13	26″	171
41		1681		113		12769		191		36481	
3	5″	1	29″	7	9″	41	85″	3	10″	89	149″
2″	7	28″	57	2″	11	44″	129	7″	17	60″	209
47		2209		119		14161		193		37249	
5	6″	23	37″	3	8″	41	89″	7	11″	17	137″
1″	7	14″	51	5″	13	48″	137	4″	15	120″	257
49		2401						199		39601	
1	5″	31	41″	9	10″	79	101″	1	10″	161	181″
4″	9	10″	51	1″	11	22″	123	9″	19	20″	201
71		5041		127		16129		217		47089	
1	6″	49	61″	1	8″	97	113″	11	13″	113	173″
5″	11	12″	73	7″	15	16″	129	2″	15	60″	233
73		5329		137		18769					
5	7″	17	53″	5	9″	7	97″	5	11″	47	157″
2″	9	36″	89	4″	13	90″	187	6″	17	110″	267

223	49729	289	83521	383	146689
13 14″	167 197″	7 13″	23 205″	3 14″	233 317″
1″ 15	30″ 227	6″ 19	182″ 387	11″ 25	84″ 401
233	54289	311	96721	391	152881
3 11″	119 185″	9 14″	31 221″	1 14″	337 365″
8″ 19	66″ 251	5″ 19	190″ 411	13″ 27	28″ 393
239	57121	313	97969		
7 12″	1 169″	5 13″	103 233″	11 16″	71 281″
5″ 17	168″ 337	8″ 21	130″ 363	5″ 21	210″ 491
241	58081	329	108241	401	160801
1 11″	199 221″	3 13″	191 269″	7 15″	79 289″
10″ 21	22″ 243	10″ 23	78″ 347	8″ 23	210″ 499
257	66049			409	167281
9 13″	49 185″	11 15″	89 241″	13 17″	137 305″
4″ 17	136″ 321	4″ 19	152″ 393	4″ 21	168″ 473
263	69169	337	113469	431	185761
5 12″	73 193″	1 13″	287 313″	9 16″	17 305″
7″ 19	120″ 313	12″ 25	26″ 339	7″ 23	288″ 593
271	73441	343	117649	433	187489
11 14″	103 205″	13 16″	151 265″	17 19″	281 365″
3″ 17	102″ 307	3″ 19	114″ 379	2″ 21	84″ 449
281	78961	353	124609	439	192721
13 15″	161 229″	15 17″	217 293″	19 20″	359 401″
2″ 17	68″ 297	2″ 19	76″ 369	1″ 21	42″ 443
287	82369	359	128881	449	201601
1 12″	241 265″	17 18″	287 325″	1 15″	391 421″
11″ 23	24″ 289	1″ 19	38″ 363	14″ 29	30″ 451
		367	134689	457	208849
15 16″	223 257″	5 14″	137 277″	11 17″	49 325″
1″ 17	34″ 291	9″ 23	140″ 417	6″ 23	276″ 601

Digitized by Google

463	214369	487	237169				
7 16″	113 337″	5 16″	217 377″	9 17″	47 353″		
9″ 25	224″ 561	11″ 27	160″ 537	8″ 25	306″ 659		
479	229441	497	247009	503	253009		
13 18″	119 349″	15 19″	193 377″	3 16″	329 425″		
5″ 23	230″ 579	4″ 23	184″ 561	13″ 29	96″ 521		

Je vois par-après comment on fera le triangle par le moyen deſdites couples ; par exemple 7 eſt la ſomme des côtez du triangle 3, 4, 5, les racines des quarrez qui donnent ledit triangle ſont 1 & 2, je cherche donc comment avec les couples ſuſdites, ſçavoir avec 1, 2″, & 1″, 3, je ferai 1 & 2.

Je trouve que les racines des doubles quarrez deſdites couples ſont les racines des quarrez du triangle ; je prens par-après un autre nombre comme 17, dont les couples ſont 1, 3″, & 2″, 5, & je trouve auſſi que prenant 3 & 2 pour les racines des quarrez qui doivent compoſer le triangle, elles donneront 5, 12, 13, qui a 17 pour la ſomme de ſes moindres côtez.

Voyons maintenant ce qu'il faut pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée. Il eſt néceſſaire que les deux quarrez dont elle eſt la ſomme ſoient les côtez d'un triangle ; car puiſque le quarré de l'hypotenuſe eſt la ſomme des quarrez des deux autres côtez d'un triangle, les racines deſdits quarrez qui ſont la ſomme d'un quarré d'hypotenuſe ſont les côtez d'un triangle.

Or les racines des doubles quarrez de chaque couple ſont les racines des quarrez dont la ſomme doit être une hypotenuſe quarrée. Il s'enſuit donc que leſdites racines des doubles quarrez doivent être les côtez d'un triangle.

Il ne ſera donc point beſoin de former les triangles qui ont les quarrez ſuſdits pour la ſomme de leurs moindres côtez, puiſqu'on n'a beſoin d'autre choſe que de voir ſi l'hypotenuſe eſt quarrée. Et on connoîtra ſi elle eſt quar-

rée en conſiderant les racines des doubles quarrez ſuſdits, & voyant s'ils peuvent être les deux côtez d'un triangle.

On ne conſidere ici que les triangles primitifs, parce que les multiples ſe réduiſent à un primitif; & parce que le primitif eſt moindre que ſon multiple, s'il y en a quelqu'un qui ait les qualitez requiſes, il ſe trouvera auparavant ledit multiple.

Pour voir ſi les racines des doubles quarrez (qui appartiennent aux quarrez ſuſdits qui ſont la ſomme des côtez d'un triangle) ſont les côtez d'un triangle, il faut conſiderer quelques proprietez des côtez des triangles ſuivant le ſixiéme précepte.

1°. Le côté pair de tout triangle primitif doit être pairement pair, & partant toutes les couples qui ſont ici auſquelles il ſe trouve un impairement pair, doivent être excluës, comme on voit aux couples de 289, 529, 2209, 2401, &c.

2°. L'un des deux côtez de chaque triangle doit être meſuré par 3 : or le plus grand des deux nombres ſuſdits ne peut pas être meſuré par 3, ni auſſi être pair, lorſque la ſomme des deux moindres côtez eſt un quarré, car le côté impair étant la difference des deux quarrez, ſi le plus grand des deux eſt pair & le moindre impair, ce moindre ſera pairement pair $+1$, car tout quarré impair eſt pairement pair $+1$, & partant étant ôté du quarré pair il reſtera un pairement pair -1, pour le côté impair. Et ſi on ajoûte par-après ce côté impair au côté pair qui eſt pairement pair, la ſomme ſera un pairement pair -1, & partant ne ſera pas un quarré; par exemple, le triangle qui ſera fait par les quarrez de 5 & 12, ne pourra pas avoir un quarré pour la ſomme de ſes côtez, car le côté impair ſera la difference de 25 & 144, quarrez de 5 & 12, & ce côté impair ſera pairement pair -1, ſçavoir 119, puiſque pour l'avoir il faut ôter un pairement pair $+1$, ſçavoir 25 du pairement pair 144. Si donc on ajoûte le pairement pair

—1, qui eſt 119, au côté pair du triangle, ſçavoir à 120 qui eſt pairement pair, la ſomme ſera un pairement pair—1, & partant ce ne ſera pas un quarré.

On montrera de la même façon que ſi le plus grand des deux quarrez qui font le triangle eſt meſuré par 3, la ſomme des deux moindres côtez ne ſera point un quarré.

Que les racines deſdits quarrez ſoient comme devant 5 & 12, pour avoir le côté impair on ôtera 25 de 144; or 25 eſt multiple de 3 +1, car tout quarré qui n'eſt point meſuré par 3 ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3.

Si donc on ôte un multiple de 3 +1 d'un multiple de 3, ſçavoir 25 de 144, reſtera 119 qui ſera ternaire —1.

Le côté impair ſera donc ternaire—1, lequel étant ajoûté au côté pair 120, qui néceſſairement eſt multiple de 3, la ſomme deſdits côtez ſera multiple de 3—1, & partant ne ſera point quarrée.

Puis donc que le plus grand des deux nombres ſuſdits, qui ſont racines des doubles quarrez, & qui doivent auſſi être côtez de triangles, n'eſt point meſuré par 3 ni par 4, il faudra de néceſſité que le moindre des deux ſoit meſuré par 3 & 4, puiſque les côtez des triangles doivent contenir 3 & 4. Le moindre doit donc être meſuré par 12.

Il faudra donc rejetter toutes les couples auſquelles la racine du moindre double quarré ne ſe meſure pas par 12.

Et le premier qui n'eſt point excepté par les deux régles précedentes eſt 5041, quarré de 71, qui a 12 pour la racine du moindre de ſes doubles quarrez.

3°. Le grand côté de tout triangle eſt compoſé, & ſe meſure par deux nombres premiers, ſi on en excepte 3, 4, 5, & quelques-uns de ſes multiples : mais lorſque le grand côté eſt impair comme il eſt toûjours ici, il n'y a aucune exception.

Et partant il faudra exclure tous les quarrez (qui ſont la ſomme des côtez des triangles) qui ont un nombre premier ou ſa puiſſance pour la racine du plus grand double quarré.

Ainſi 5041, quarré de 71, ſera auſſi exclus, parce que le plus grand de ſes doubles quarrez a 61 pour racine; de même 5329 ſera exclus, parce que 53 eſt ſa grande racine, & que 61 & 53 ſont nombres premiers.

Les nombres ou quarrez ſuivans, ſçavoir 6241, 7921 & 9409 ſeront auſſi exclus, car ils ont bien un nombre compoſé pour leur grande racine, mais la moindre n'eſt pas meſurée par 12.

Comme auſſi 57121 ſera exclus, quoique ſa moindre racine 168 ſoit meſurée par 12, car la grande racine 169 eſt le quarré d'un nombre premier.

Il ne reſtera donc à examiner que les nombres ou quarrez, dont la moindre des racines des doubles quarrez eſt meſurée par 12, & la grande eſt meſurée par deux nombres premiers; car puiſque les racines des doubles quarrez doivent être les côtez d'un triangle, elles doivent avoir les deux ſuſdites conditions qui appartiennent aux côtez des triangles tels qu'il eſt ici requis.

On aura auſſi égard aux finales des côtez des triangles, & par l'examen qu'on fera deſdits triangles on trouvera que lorſque le côté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toûjours par 5.

Quand il finit par 4 ou 6, l'impair finit par 3 ou 7.

Quand il finit par 0, l'impair finit par 1 ou 9.

Par les régles précedentes on excluroit la plûpart des nombres ſuſdits, & il ne reſteroit que 24, 265, qui appartiennent à 82369 quarré de 287; puis 168, 305, appartenans à 167281,] 288, 305, appartenans à 185761,] 84, 365, qui appartiennent à 187489,] 276, 325, qui dépendent de 208849, & 96, 425, qui viennent de 253009. Mais examinant leſdits nombres par les finales on rejettera 24, 265,] 84, 365,] 276, 325,] & 96, 425, parce que les finales 4 & 5,] & 6, 5, ne ſont point enſemble aux côtez des triangles.

Reſte donc les couples 168, 305, & 288, 305 qu'il faut

faut examiner, & voir ſi leurs quarrez étant joints enſemble font un quarré; mais il ſe trouve que non, & partant ils ne feront point les côtez d'un triangle, & l'hypotenuſe des triangles ne ſera point quarrée.

Or le plus grand quarré de la table eſt 253009, & partant on ſera aſſûré qu'il n'y a aucun quarré qui ſoit la ſomme des deux côtez d'un triangle qui ait ſon hypotenuſe quarrée, s'il n'eſt plus grand que ledit 253009 quarré de 503.

Mais on pourroit traiter cette queſtion d'une autre ſorte, & au lieu de faire une table des quarrez qui ſont la ſomme des côtez d'un triangle, on en pourroit faire une qui contiendroit tous les quarrez qui ſont hypotenuſes.

Or parce que la méthode enſeigne de ſe ſervir des moindres nombres poſſibles, & auſſi de retrancher tout ce qui eſt inutile, comme on voit par le troiſiéme précepte, je cherche les moyens de faire leſdits racourciſſemens & excluſions.

Pour amoindrir les nombres on ſe ſervira des racines au lieu des quarrez des hypotenuſes, & par le moyen du triangle qui a ladite racine pour hypotenuſe, on aura le triangle qui a le quarré de ladite hypotenuſe; par exemple, avec 3, 4, 5, je ferai le triangle qui a 25 pour hypotenuſe, car ledit triangle eſt fait par les quarrez de 3 & 4, qui ſont côtez dudit triangle 3, 4, 5.

Mais pour n'avoir point la peine de prendre leſdits quarrez de 3 & 4, je chercherai quelqu'autre méthode pour trouver 7 & 24 (qui ſont côtez du triangle qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuſe,) par le moyen deſdits 3 & 4.

Et premiérement 24 eſt le double du produit de 3 & 4, reſte donc à trouver 7. Si je prens la ſomme deſdits 3 & 4 j'aurai 7, il faut donc voir à quelqu'autre triangle ſi cela réuſſira de même.

Au triangle 5, 12, 13, la ſomme de 5 & 12 eſt 17, mais 17 n'eſt pas côté du triangle qui a 169 quarré de 13 pour

hypotenuſe. Ledit triangle eſt 119, 120, 169. Je regarde ſi 17 meſure 119, & je trouve qu'il le meſure, le quotient eſt 7, lequel 7 eſt la difference de 5 à 12.

Je dis donc que ſi on multiplie la ſomme des deux côtez par leur difference, on aura le côté impair du triangle qui aura pour hypotenuſe le quarré de l'hypotenuſe du premier triangle.

Et je vois que la même choſe arrive au premier triangle 3, 4, 5, car 7 qui eſt la ſomme de 3 & 4, étant multiplié par la difference 1 donne 7 pour côté du triangle, qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuſe, ſçavoir de 7, 24, 25.

De cette façon on aura les côtez des triangles dont l'hypotenuſe eſt quarrée, par le moyen de tous les triangles, & ayant leſdits côtez on aura leur ſomme : reſte donc à voir ſi cette ſomme ſera quarrée.

Mais afin de n'avoir point la peine d'examiner tous les triangles, il ſe faut ſervir de l'autre moyen qui eſt de retrancher tout ce qui eſt inutile ; ce qui ſe fera en conſiderant quelques proprietez du quarre, puiſque ladite ſomme des côtez doit être un quarré : par exemple, tout quarré impair (tel qu'eſt ladite ſomme) ſurpaſſe de l'unité un pairement pair.

De là on inferera que les triangles dont le moindre côté ſera impair, ne pourront pas donner de triangle qui ait un quarré pour la ſomme de ſes côtez, & partant on ne prendra que les triangles dont le moindre côté ſera pair.

Et de cette autre proprieté, que tout quarré non diviſible par 3 ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, on inferera que le moindre côté doit être meſuré par 3, & partant il ne faudra conſiderer que les triangles dont le moindre côté ſera meſuré par 12.

La façon dont on trouvera ces deux excluſions a été traitée au commencement du préſent exemple, & partant on ne la repetera point ici ; car les côtez des triangles dont on parle ici ſont les mêmes nombres qui doivent ſer-

vir de racine aux doubles quarrez appartenans aux ſommes quarrées ſuſdites, & on a montré que la moindre des deux racines ſuſdites doit être meſurée par 12.

Je prens donc tous les triangles dont le moindre côté eſt meſuré par 12. Et on pourroit les mettre tous de ſuite commençant par 12, 35, 37,] 24, 143, 145,] 36, 77. 85,] 36, 323, 325, &c. mais parce qu'on a déja examiné cette queſtion par une autre voye, ſçavoir par la ſomme des côtez, & qu'on l'a pourſuivie juſqu'à faire que la ſomme des côtez de triangle fuſt 253009, on commencera par des hypotenuſes qui donneront à peu près ladite ſomme, ou plûtôt moins, afin que dans l'inégalité deſdites ſommes, qui ſont ſouvent en proportion fort differente avec l'hypotenuſe, on n'en omette aucune.

Je commencerai donc par les hypotenuſes quarrées dont la racine n'eſt point moindre que 400, & ſuivrai l'ordre deſdites hypotenuſes, les choiſiſſant dans une table que je ſuppoſe être faite deſdites hypotenuſes, deſquelles il ne faut prendre que les racines, comme il a été dit.

Que ſi on n'avoit point travaillé à la queſtion par la voye précedente, ou qu'on n'eût point de table deſdites hypotenuſes, il faudroit prendre les triangles dont le moindre côté ſe meſure par 12, & pourſuivre, comme on vient de le montrer, & pratiquer les excluſions dont on parlera ci-après.

On peut conſiderer les finales, & voir quelles elles doivent être, afin que la ſomme des côtez du triangle qu'on fera ſoit un quarré.

Et premiérement quand le côté pair du triangle eſt 2 ou 8, l'impair doit finir par 5. Si le pair finit par 0, l'impair peut avoir 1 ou 9 pour finale, & en toutes les façons ſuſdites les finales n'empêchent point que la ſomme des côtez du triangle qui ſera produit du premier qui eſt ici conſideré, ne ſoit un quarré.

Mais ſi le côté pair du premier triangle finit par 6, le côté impair doit finir par 3. Et ſi ledit côté pair finit par 4, l'impair doit avoir 7 pour finale ; autrement ſi 6 étoit avec 7, & 4 avec 3, la ſomme des côtez du triangle qui ſeroit produit, n'auroit pas une finale quarrée ; ce qu'on montrera comme il s'enſuit.

120	391	409	Pour faire avec le premier
84	437	445	triangle celui dont l'hypotenuſe
168	425	457 +	eſt quarrée, on multiplie pour le
132	475	493	côté impair la ſomme des deux
—336	377	505	côtez par leur difference, & pour
396	403	565	le côté pair on prend le double du
276	493	565 +	produit des mêmes côtez: Si donc
48	575	577	les côtez finiſſent par 6 & 7, la
240	551	601	ſomme d'iceux finira par 3, car 7
—336	527	625	& 6 ſont 13, & la difference finira
300	589	661	par 1, car le côté pair étant le
—156	667	685	moindre côté, il le faudra ôter
108	725	733 +	de 7.
216	713	745	Le produit de 1 par 3, ſçavoir
468	595	757	de la ſomme par la difference ſera
432	665	793	3, & telle ſera la finale du côté
168	775	793	impair du triangle requis.
540	629	829 +	Pour le côté pair il faudroit
—504	703	865	prendre le produit des mêmes fi-
348	805	877	nales 6 & 7 qui finira par 2, & ſon
60	899	901	double finira par 4, partant le
420	851	949	côté pair finira par 4, lequel étant
—696	697	985	joint avec le côté impair qui finit
372	925	997 +	par 3, la ſomme des deux finira
660	779	1021	par 7, qui n'eſt point une finale
192	1015	1033	quarrée ; car les quarrez impairs
132	1085	1093	ont pour finale 1, 9, ou 25, &
744	817	1105	partant la ſomme des deux côtez
576	943	1105	ne ſera point un quarré.

Digitized by Google

—264	1073	1105	On montrera de même que ſi
528	1025	1153 +	les côtez du premier triangle fi-
204	1147	1165	niſſoient par 4 & 3, la ſomme des
660	989	1189	côtez du triangle qui en ſeroit
612	1075	1237	produit finiroit auſſi par 7, & par-
			tant elle ne ſeroit point quarrée.

On voit ici pluſieurs triangles qui ont tous leur moindre côté diviſible par 12, & qui ſont deſtinez pour faire des triangles qui ayent pour hypotenuſe le quarré de l'hypotenuſe de ceux-ci. Mais on en exclura ceux qui n'ont pas les finales de leurs côtez ainſi qu'il eſt requis, & qui ſont marquées — devant leur moindre côté; comme ſont 336, 377,] 336, 527,] 156, 667,] 504, 703,] &c. car le 6 ſe doit trouver avec le 3,] & le 4 avec le 7.

Il y a encore une autre excluſion, mais elle eſt tirée de la premiere partie de cet exemple, & de l'autre table.

Les côtez des triangles qui ſont en cette table-ci, ſont les mêmes qui devroient être les racines des doubles quarrez de la table précedente, car leſdites racines doivent être les côtez d'un triangle, & leurs quarrez doivent faire le triangle qui a les deux conditions ſuſdites.

Or on a montré que la plus grande des deux ſuſdites racines doit être impair, mais je veux ici montrer qu'elle eſt hypotenuſe primitive.

Puiſque le quarré qui eſt la ſomme des côtez d'un triangle, eſt la difference d'un quarré & d'un double quarré, & qu'en la table ſuſdite il y a toûjours deux couples deſdits quarrez & doubles quarrez, en l'une deſquels le double quarré eſt plus grand que le quarré, & en l'autre il eſt moindre; il s'enſuit que le plus grand double quarré des deux eſt la ſomme de deux quarrez: par exemple, 49 eſt la difference de 1, 50, & de 32, 81, & partant dans la couple dont le double quarré eſt plus grand que le quarré 49, ledit double quarré qui eſt 50 eſt la ſomme de deux quarrez, ſçavoir de 1 & 49, d'où il s'enſuit qu'il eſt hypo-

tenuſe : mais voyons quelle hypotenuſe. Le quarré qui ſert de ſomme aux côtez comme 49, eſt toujours impair, & partant l'autre quarré 1 ſera auſſi impair, puiſqu'enſemble ils doivent faire un double quarré qui eſt pair; ce ſont donc deux quarrez impairs qui ſont premiers entr'eux, car s'ils avoient une commune meſure, le double quarré l'auroit auſſi, & le triangle ſeroit multiple ; mais on ſuppoſe qu'il ſoit primitif.

Puis donc que les deux quarrez, qui joints enſemble font le double quarré, ſont impairs & premiers entr'eux, leur ſomme ſera le double d'une hypotenuſe primitive, comme on a dit ailleurs : mais la même ſomme eſt un double quarré, & partant la racine de ce double quarré ſera hypotenuſe primitive.

Le grand côté des triangles de la table précedente doit donc être l'hypotenuſe d'un triangle, & partant pairement pair plus 1.

Je marque donc les triangles dont le grand côté eſt hypotenuſe, la marque eſt + & rejette les autres dont le grand côté eſt pairement pair — 1, comme 120, 391, 409, &c. & ceux auſquels ledit côté étant pairement pair + 1, n'eſt pas néanmoins hypotenuſe comme 84, 437, 445, &c.

Il n'y a donc que ſix triangles qui ne ſoient point exclus, ſçavoir 168, 425, 457,] 276, 493, 565,] 108, 725, 733,] 540, 629, 829,] 372, 925, 997,] 528, 1025, 1153, deſquels triangles il faudra faire ceux qui auront pour hypotenuſe le quarré de leur hypotenuſe. Ainſi avec 168, 425, 457, on fera le triangle dont l'hypotenuſe ſera le quarré de 457 ; mais on n'a beſoin que de la ſomme des côtez dudit triangle, pour voir ſi c'eſt un quarré : par exemple, on prendra pour le côté pair dudit triangle le double du produit de 168 par 425, qui fera 142800, l'impair ſe trouvera multipliant la ſomme de 168 & 425 par leur difference, ſçavoir 593 par 257, le produit 152401 eſt le côté impair, qui étant joint au côté

pair 142800 donne 2950201 pour la ſomme des côtez, qui n'eſt point un quarré, ainſi qu'il paroîtra en prenant la racine par la voye ordinaire, & par la même façon on trouvera que les autres cinq triangles ne donnent pas des triangles dont la ſomme des côtez ſoit un quarré.

HUITIE'ME EXEMPLE.

TROUVER un triangle dont l'hypotenuſe & l'enceinte ſoient quarrées.

Je cherche quelque voye pour trouver l'enceinte des triangles, autrement qu'en ajoûtant les côtez. Je trouve qu'on la peut avoir en multipliant la ſomme des racines des quarrez qui font le triangle, par le double de la plus grande racine. Ainſi au triangle 3, 4, 5, les racines ſont 2 & 1, leur ſomme eſt 3, qui multipliée par 4 (double de la plus grande racine 2) donne 12, pour l'enceinte dudit triangle.

De cette proprieté je conclurai que pour faire que l'enceinte ſoit un quarré, il faut que la ſomme des deux racines ſoit un quarré, & que la plus grande racine ſoit un double quarré, afin que venant à muliplier ladite ſomme (qui eſt un quarré) par un autre quarré (qui ſera le double de la plus grande racine,) on ait un quarré pour l'enceinte. Ainſi prenant pour les deux racines 18 & 7 qui enſemble font 25, on multipliera ladite ſomme 25 par 36 double de 18, & on aura 900 pour l'enceinte du triangle 252, 275, 373.

Maintenant il faut voir ce qui eſt néceſſaire pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée, ou bien ſuppoſant que l'hypotenuſe de ce triangle ſoit quarrée, je regarde ce qu'on en peut déduire.

Je voi que ſi l'hypotenuſe eſt quarrée, les racines des quarrez dont elle eſt la ſomme doivent être les côtez d'un triangle.

Mais parce qu'il faut qu'un même triangle ait l'hypote-

nuſe quarrée, & l'enceinte quarrée, je joins enſemble les deux ſuſdites conditions, & partant il faudra trouver un triangle dont le grand côté ſoit double quarré, & la ſomme des deux moindres côtez ſoit un quarré.

Pour faire que le côté pair ſoit double quarré, il faut que le triangle ſoit fait de deux qq. parce que leurs racines doivent être quarrées : il faudra donc trouver un triangle fait par deux qq. qui ait un quarré pour la ſomme de ſes moindres côtez.

Or les nombres qui ſont la ſomme des deux côtez d'un triangle ſont deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & les racines des deux doubles quarrez ſont auſſi les racines des quarrez qui ſont le triangle : mais les quarrez qui ſont le triangle ſont des qq. partant leurs racines ſont quarrées : il s'enſuit donc que les racines des doubles quarrez ſuſdits ſont des quarrez.

On pourra donc ſe ſervir ici de la premiere Table de l'éxemple précédent qui contient les quarrez qui ſont la ſomme des côtez d'un triangle : il faudroit donc trouver en ladite Table, dans la liſte des couples appartenantes aux quarrez, quelque quarré qui eut deux quarrez pour les racines de ſes doubles quarrez, ce qui ne ſe trouve point en toute cette Table : toutefois on ne peut pas être aſſuré qu'il ne s'en trouvat point ſi on pourſuivoit la Table plus loin, puiſque cela ſe trouve bien aux ſommes non quarrées, comme à 23 qui a 1 & 4 pour les racines de ſes doubles quarrez, & à 137 qui a 4 & 9.

Or cette Table mene fort loin, car par ſon moyen on entre bien avant dans les nombres d'onze lettres, & voici comme il y faudroit procéder, ſi on avoit trouvé deux quarrez qui ſerviſſent de racine à deux doubles quarrez appartenans à un même nombre.

Par exemple, ſi les racines des doubles quarrez qui appartiennent à 247009 quarré de 497, ſçavoir 306,353, étoient deux quarrez, & qu'on voulut par leur moyen faire

faire le triangle qui auroit des quarrez pour ſon enceinte, & pour ſon hypotenuſe, voici comme il y faudroit procéder.

Le triangle fait par les quarrez de 306 & 353 auroit pour côté pair 216036, & pour côté impair 30973.

Les quarrez de ces deux côtez qui ſont 46671553296 & 959326729 étant joint enſemble, donneront une hypotenuſe quarrée qui ſera 4763088002 5.

Or l'enceinte du triangle dont ledit nombre eſt hypotenuſe, ſe trouvera multipliant la ſomme des racines 216036 & 30973, ſçavoir 247009, (qui eſt un quarré, puiſque c'eſt le nombre auquel appartiennent les deux racines premierement priſes, ſçavoir 306 & 353,) par le double de la plus grande, ſçavoir par 432072 pour avoir 106725672648 qui ſera l'enceinte du triangle, dont l'hypotenuſe ſera le quarré ſuſdit 4763088002 5.

Et cette enceinte ſeroit auſſi un quarré ſi les deux nombres ſuſdits 306 & 353 étoient quarrez, car cela étant 216036 qui eſt le double de leur produit ſeroit un double quarré, & le double de ce nombre, ſçavoir 432072 ſeroit un quarré: ſi donc on vient à le multiplier par 247009 qui eſt auſſi un quarré, le produit ſeroit un quarré: or ce produit étant l'enceinte d'un triangle qui a un quarré pour hypotenuſe, ledit triangle auroit les deux conditions requiſes.

On peut encore éxaminer cette même queſtion d'une autre façon, comme il s'enſuit.

L'enceinte ſe trouve, comme il a été dit, en multipliant la ſomme des deux racines par le double de la plus grande des deux; il faudra donc, afin que l'enceinte ſoit quarrée, que la ſomme des deux racines ſoit un quarré, & la plus grande ſoit un double quarré, afin que ſon double ſoit un quarré. Mais afin que l'hypotenuſe ſoit quarrée, il faut que les racines ſuſdites ſoient côtez de triangles, afin que leurs quarrez étant joints enſemble faſſent le quarré d'une

hypotenuſe : il faudra donc trouver un triangle dont le grand côté ſoit double quarré, & la ſomme des deux moindres côtez ſoit un quarré.

Puiſque le grand côté doit être double quarré, il faut qu'il ſoit le double d'un quarré pair, car autrement il ne ſeroit pas pairement pair, ainſi qu'il eſt requis aux côtez pairs, & partant il aura pour finales 2, 8, ou 0, comme leſdits doubles quarrez.

Or quand le côté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toujours par 5, (ce qui ſe doit entendre aux primitifs dont nous parlons ici) & partant la ſomme des côtez finit par 7 ou 3 qui ne ſont point finales quarrées.

Et partant ſi le côté impair finit par 2 ou 8, la ſomme des deux côtez ne pourra pas être un quarré.

Reſte donc que le côté pair finiſſe par 0, car ainſi l'impair finira par 1 ou 9, & la ſomme deſdits côtez aura une finale quarrée.

On conſidérera par après que tout quarré non diviſible par 3 ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, & partant le double quarré ſera ternaire + 2 ou --1. Mais en tout triangle l'un des côtez ſe meſure par 3, & partant ſi le côté pair n'eſt point ternaire l'impair le ſera, & la ſomme de ces côtez dont l'un eſt ternaire, & l'autre ternaire --1 ſera auſſi ternaire--1, & partant ce ne ſera pas un quarré ainſi qu'il eſt requis.

Il faut donc que le côté pair ſoit meſuré par 3 & auſſi par 5, afin qu'il finiſſe par 0; il ne pourra donc être moindre que 1800, double du quarré de 30.

On remarquera auſſi que le côté impair doit être ternaire + 1, afin qu'étant joint au côté pair qui eſt ternaire, il faſſe un ternaire + 1 qui puiſſe être quarré.

Or la moitié du côté pair, ſçavoir 900 eſt produite par les racines des deux quarrez conſtitutifs du triangle, leſquelles racines doivent néceſſairement être quarrées, afin qu'elles ſoient premieres entr'elles, & l'une d'icelles doit

être meſurée par 9 & l'autre non, puiſque le côté pair eſt meſuré par 9.

Et partant le côté impair étant la difference des deux quarrez deſdites racines, il ſera la difference de deux qq. le moindre deſquels doit être meſuré par 81, & ſa racine par 9, autrement le côté impair ſeroit ternaire--1, car puiſque l'un des deux qq. doit être meſuré par 3 ou 81, ſi c'étoit le plus grand qui le fut, donc le moindre qq. ſeroit ternaire +1, lequel étant ôté du plus grand qui ſeroit ternaire, reſteroit un ternaire--1 pour ledit côté impair.

Ce même côté impair doit être auſſi pairement pair +1, autrement étant joint au côté pair, il ne feroit pas un pairement pair +1, comme doit être la ſomme pour être quarrée; & partant le ſuſdit moindre qq. qu'on a montré devoir être meſuré par 81, doit être pair; car s'il étoit impair, le grand qq. ſeroit pair, & leur difference ſeroit un pairement pair—1; car ſi on ôte un pairement pair +1 d'un pairement pair, il reſtera un pairement pair—1, & & partant la racine de ce moindre qq. ſera au moins 36.

D'ailleurs puiſque tout qq. impair ſurpaſſe de l'unité un multiple de 16, le côté impair, qui eſt la difference de deux qq. le plus grand deſquels eſt impair, ſurpaſſera auſſi de l'unité un multiple de 16, car le qq. pair étant diviſible par 16 (comme tout qq. pair doit être,) ſi on l'ôte d'un multiple de 16 +1, il reſtera un multiple de 16 +1.

Quand donc on aſſemblera les deux côtez, ſçavoir le pair avec l'impair, ſi le pair ne ſe meſure que par 8 comme 1800, (qu'on avoit pris pour le moindre côté pair poſſible) la ſomme des deux côtez ſuſdits retiendra auſſi cette reſtriction, & ſurpaſſera de l'unité un multiple de 8 & non pas de 16.

Mais les nombres qui ſont particulierement affectez à être la ſomme des côtez des triangles, different tous de l'unité d'un multiple de 8, & partant leurs quarrez ſurpaſſeront de l'unité un multiple de 16, tels ſont 49, 289, 529, &c.

De là il s'enſuit que le côté pair doit au moins être meſuré par 16, & partant au lieu de 1800 il faudra prendre ſon quadruple 7200, double de 3600, quarré de 60, qui eſt le moindre qui puiſſe avoir les conditions requiſes, ſçavoir d'être double quarré, & d'être diviſible par 3, 5, & 16.

Mais ledit 7200 ſe trouvera encore trop petit : car ſi on prend, comme il a été dit, les parties de la moitié 3600 en telle ſorte que la partie paire ſoit meſurée par 9 ainſi qu'il eſt requis, on aura pour parties 144 & 25 ; mais la partie paire doit être la moindre comme on a montré cy-devant, puiſqu'elle eſt la racine d'un qq. pair, qui doit être le moindre des deux.

Si donc 144 eſt la moindre partie poſſible, il faut que l'autre ſoit plus grande, & qu'elle ſe meſure par 25, & que ce ſoit un quarré comme 625, qui multiplié par 144 donne 90000, dont le double 180000 ſera le moindre côté pair qu'on doive examiner.

Mais le côté pair étant tel, & prenant 144 & 625 pour les parties qui doivent faire le triangle, le côté impair ſe trouvera plus grand que le pair, car ce ſera 369889. Or eſt-il qu'il doit être moindre que le pair, puiſque la queſtion requiert que le grand côté ſoit double quarré, & par conſéquent pair.

Il faut donc voir ce qui fait ici que le grand côté eſt impair. Cela provient de ce que les parties ſuſdites 144 & 625, qui doivent être les racines des quarrez dont le triangle eſt formé ſont trop diſtantes l'une de l'autre, & ſont hors des bornes néceſſaires pour faire que le grand côté ſoit pair.

Il faudra donc prendre des nombres moins differens pour leſdites racines, comme 576 & 625, auſquelles la moindre eſt toujours paire, & le double du produit deſdites racines ſçavoir 720000 ſera le côté pair, & l'impair ſera 58849.

Or ſi la ſomme de ces deux côtez qui eſt 778849 étoit un quarré, on auroit ce qui eſt requis ; car multipliant ladite ſomme 778849 par 1440000 double du grand côté 720000, on auroit 1121542560000, qui eſt l'enceinte du triangle qui eſt fait par les quarrez deſdits 720000 & 58849, duquel triangle l'hypotenuſe eſt le quarré de la ſomme des quarrez de 576 & 625 ; ou ſi on veut l'hypotenuſe dudit triangle eſt le quarré de l'hypotenuſe du triangle, dont les côtez ſont 720000 & 58849.

Et l'enceinte ſuſdite 1121542560000 ſeroit un quarré, puiſqu'elle ſeroit le produit des deux quarrez 778849 & 1440000. Mais parce que ledit 778849 (qui eſt la ſomme des côtez 720000 & 58849) n'eſt pas quarré, l'enceinte ſuſdite ne ſera pas auſſi un quarré.

On voit donc par là que s'il y a des triangles qui ayent leur hypotenuſe & leur enceinte quarrée, il faut que ladite enceinte ſoit fort grande, puiſque la moindre & premiere qui ait beſoin d'être éxaminée a treize lettres comme on voit ici.

Qui voudroit paſſer outre, on pourroit prendre 1225 au lieu de 625, puis on augmenteroit auſſi 576 prenant garde toujours que la partie paire ſoit la moindre, mais que l'impaire ne l'excéde pas plus que de la raiſon qu'il y a de 1 + ☌. 2 à 1, & que ſi la partie paire eſt 1000000, l'impaire n'excede pas 2414213.

Cet examen conduiroit fort loin avec peu de nombres.

Et pour éxaminer leſdits 576 & 1225, je les prens pour racines des quarrez qui font un triangle, partant le côté pair ſera 1411200, & l'impair ſera 1168849, (qui ſe trouve multipliant la ſomme de 576 & 1225 par leur difference, ſçavoir 1801 par 649) la ſomme des deux côtez ſera 2580049 qui n'eſt point quarrée, & partant on pourroit paſſer à un autre ; car l'enceinte de l'autre triangle qu'on cherche ne ſeroit point un quarré, puiſqu'elle ſe trouve multipliant ladite ſomme 2580049 par

le double du côté pair, ſçavoir par 2812400 qui eſt un quarré.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

TRois Marchands ont mis enſemble quelque argent pour leur trafic : celui du premier a profité pendant ſix mois, celui du ſecond pendant neuf mois, & celui du dernier pendant douze mois.

Le premier a reçû 70 livres, tant pour ſa miſe que pour ſon gain. Le ſecond 230 livres. Le troiſiéme 180 livres. On demande la miſe de chacun.

Ces ſortes de queſtions dépendent de la premiere regle, car on peut prendre d'autres éxemples de même nature dont on aura la ſolution.

Ainſi je fais une autre queſtion ſemblable à la premiere, & je poſe que le premier Marchand ait mis 8 livres, & ait gagné 12 livres en ſix mois ; le ſecond & le troiſiéme doivent profiter à même raiſon eu égard au temps : ſi donc le ſecond a mis 6 livres, ſon gain ſera de 9 livres en ſix mois, & partant ſi ſon argent a profité pendant neuf mois, le profit ſera de 13 livres 10 ſols Si le troiſiéme a mis 3 livres, le profit en ſix mois ſera de 4 livres 10 ſols, & en douze mois de 9 livres.

Donc le premier aura 20 livres, tant pour ſon profit en ſix mois que pour ſa miſe. Le ſecond aura 19 livres 10 ſols, pour ſon profit de neuf mois & pour ſa miſe. Le troiſiéme aura 12 livres pour ſon profit en douze mois & pour ſa miſe.

Il faut donc voir comment avec 20 livres & ſix mois de temps on trouvera la miſe qui eſt 8 livres, & de même des autres.

C'eſt la façon ordinaire des queſtions qui n'ont qu'une ſolution, ou qui ont tout nombre pour ſolution comme celle-ci : mais pour celles qui en ont une multitude indéfinie (on entend ici parler des nombres dont il y a ou dont

il peut y avoir une infinité, & qui néanmoins vous ménent bientôt à de fort grands nombres, comme qui demanderoit les nombres parfaits, ou ceux qu'on nomme Amiables) on n'eſt pas obligé de trouver 8, car ce ſeroit un grand hazard ſi on trouvoit 8 parmi tant d'autres nombres qu'on peut donner; & puiſque le gain ni la miſe ne ſont point ſéparément déterminez, on pourra prendre quel nombre on voudra pour la miſe ou pour le gain, car on peut augmenter & diminuer l'un ou l'autre tant qu'on voudra; il ſuffit ſeulement de faire que l'argent de chacun profite egalement en temps égal, & en temps inégal à proportion du temps. Or on peut ſéparer un nombre en deux parties, qui auront entr'elles telle raiſon donnée qu'on voudra.

Mais puiſqu'en la queſtion propoſée la raiſon de la miſe & du gain n'eſt point donnée, il ſera permis de prendre le nombre & la raiſon à diſcrétion, puiſque la ſomme de la miſe & du profit peut être ſéparée en deux parties qui auront telle raiſon qu'on voudra.

Je poſe donc que la miſe du premier ſoit de 50 livres, ſon profit ſera donc de 20 livres; il faut donc voir quelle raiſon il y a de 50 à 20: mais parce que le temps de chacun eſt different, il faut diviſer le profit par le temps, & pour plus grande facilité je prens le plus grand nombre qui ſoit commun aux temps des trois Marchands. On aura donc pour le premier Marchand deux termes, pour le ſecond trois termes, & pour le troiſiéme quatre termes.

Je regarde quel profit a fait le premier Marchand en un terme, & je trouve 10 livres. Je conſidére maintenant quelle raiſon il y a de la miſe 50 au profit d'un terme 10, la raiſon eſt quintuple, & le profit eſt par terme la cinquiéme partie de la miſe.

On poſera donc $\frac{1}{5}$ pour la miſe de chacun; & parce que les ſommes données contiennent la miſe & le gain tout enſemble, il faut aſſembler le profit avec leſdits $\frac{1}{5}$.

Le ſecond Marchand a laiſſé ſon argent à profit pendant trois termes, & en chaque terme a gagné la cinquiéme partie de ſa miſe : or la miſe étant $\frac{5}{5}$, la cinquiéme partie ſera $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{5}$ pour les trois termes; & parce que les 230 livres qu'a euës le ſecond Marchand contiennent la miſe & le gain, il faut aſſembler les $\frac{5}{5}$ de la miſe, avec les $\frac{3}{5}$ de gain, & on aura en tout $\frac{8}{5}$; je dirai donc par la régle de proportion :

Si $\frac{8}{5}$ donnent 230, combien $\frac{5}{5}$, ou bien :

Si 8 donnent 230 livres, combien 5. Je multiplie 230 par 5, & je diviſe le produit 1150 par 8, le quotient 143 livres 15 ſols ſera la miſe du ſecond.

De même pour le troiſiéme Marchand, ſa miſe étant $\frac{5}{5}$, ſon profit pour quatre termes à raiſon de $\frac{1}{5}$ pour terme ſera $\frac{4}{5}$, qui étant joint à la miſe donne $\frac{9}{5}$ pour la ſomme qui répréſente 180. Je trouverai donc par la même regle de proportion que :

Si $\frac{9}{5}$ ou 9 donnent 180, — $\frac{5}{5}$ ou 5 donneront 100 pour la miſe du troiſiéme Marchand.

Si on avoit pris 60 livres pour la miſe du premier Marchand, le profit ſeroit 10 livres en deux termes, & partant 5 livres par terme, qui eſt la douziéme partie de la miſe, & ſur cette proportion on trouveroit les miſes des autres.

DIXIE'ME EXEMPLE.

TRouver un triangle dont l'hypotenuſe ſoit quarrée, & dont le moindre côté ait un quarré pour difference avec chacun des deux autres.

Puiſque le triangle a deux proprietez differentes, il les faut examiner l'une après l'autre.

1° Pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée, il faut que les racines des quarrez qui la compoſent ſoient les deux côtez d'un autre triangle.

2°. Pour faire qu'un triangle ait ſon moindre côté different d'un quarré de chacun des deux autres, il faut prendre

prendre pour la racine du plus grand des deux quarrez qui le compoſent, l'hypotenuſe d'un triangle & la racine de l'autre quarré ſera un des moindres côtez du même triangle, moins la difference de l'hypotenuſe & de l'autre côté. Ainſi ayant choiſi le triangle 3, 4, 5, l'hypotenuſe 5 ſera la racine du grand quarré, & pour l'autre racine j'ôte d'un des cotez comme de 3 la difference de 4 à 5, ou de 4 la difference de 3 à 5, & reſtera 2. On a donc 5 & 2 dont les quarrez font le triangle 20, 21, 29, qui a la condition requiſe. On peut voir cela dans le diſcours des triangles.

Mais leſdites racines 5 & 2 doivent être les deux côtez d'un triangle, ſi on veut que l'hypotenuſe qui ſera faite de leurs quarrez ſoit un quarré.

Il faut donc trouver un triangle dont le moyen côté ſoit l'hypotenuſe d'un autre triangle, & le moindre côté ſoit un des côtez de cet autre triangle moins la difference de ladite hypotenuſe & de ſon autre côté. De ſorte que ſi 5 & 2 étoient les deux côtez d'un triangle, on auroit ce qu'on cherche, parce que le moyen côté 5 eſt l'hypotenuſe du triangle 3, 4, 5, & le moindre côté 2 eſt un des côtez dudit triangle 3, 4, 5, moins la difference de l'autre côté & de l'hypotenuſe.

Je chercherai par après en la Table des triangles, ſi je trouverai un triangle qui ait ſes deux côtez tels qu'il eſt requis.

Et pour abréger & exclure les ſuperflus, je voi que le grand côté doit être une hypotenuſe, je ne m'arrêterai donc qu'aux triangles dont le grand côté ſera impair & hypotenuſe primitive, car les hypotenuſes multiples ne doivent point ici être conſidérées, à raiſon que le triangle dont elles ſont hypotenuſes eſt multiple, & le triangle auquel elles ſerviroient de côté ſeroit auſſi multiple: or nous n'avons dans la Table que des primitifs, & il ne ſerviroit de rien auſſi de conſidérer les multiples,

Or il y a beaucoup de manieres pour connoître ſi un nombre n'eſt point hypotenuſe : mais il ne ſe faut ſervir que de celles qui donnent d'abord à connoître que le nombre n'eſt point hypotenuſe, comme s'il eſt pairement pair --1 ; & s'il eſt diviſible par 3, on rejettera donc les triangles auſquels le côté impair eſt petit côté, & ceux auſſi auſquels ledit côté impair eſt meſuré par 3, & ceux auſquels il eſt pairement pair --1.

Je conſidére auſſi quel doit être l'autre côté du triangle, & je trouve qu'il doit être moindre que la moitié du moyen côté qui doit être hypotenuſe, comme on voit à 5 & 2, & cela eſt facile à juger par la conſtruction de 2.

Les côtez impairs ſont dans la ſeconde colomne de la Table après l'hypotenuſe.

Avec cela j'éxamine les triangles de la Table, & je regarde ceux dont le grand côté eſt impair, & ſurpaſſe de l'unité un pairement pair.

Le premier eſt celui qui a 21 pour grand côté : mais parce que 21 eſt meſuré par 3, je paſſe outre. Je laiſſe auſſi 45, & puis 77, parce qu'on voit ſans peine qu'il eſt diviſible par 7, lequel 7 n'étant point hypotenuſe, ſes multiples ne ſeront point auſſi hypotenuſes primitives.

Le premier qu'on trouve qui doive être éxaminé eſt 221, ſon autre côté eſt 60, je trouve que 221 eſt hypotenuſe des triangles 221, 21, 220, & de 221, 171, 140. Mais d'abord je trouve du défaut à tous les deux, car puiſque 60 doit être moindre que l'un & l'autre des côtez du triangle auquel 221 ſert d'hypotenuſe, le triangle 221, 21, 220, n'y pourra pas ſervir.

Dans l'autre triangle 171 étant pairement pair --1, ſi on l'ôte de 221, qui étant hypotenuſe doit toujours être pairement pair +1, il reſtera un impairement pair, qui étant ôté d'un pairement pair, ſçavoir du côté pair 140, reſtera un impairement pair, lequel partant ne pourra pas être le côté pair d'un triangle tel qu'eſt 60. Il faut donc :

1°. Que le grand côté du triangle ſerve d'hypotenuſe à un autre triangle.

2°. Que le petit côté qui eſt pair, ſoit moindre que la moitié du grand côté.

3°. Que le ſecond triangle auquel le grand côté du premier ſert d'hypotenuſe, ait ſon moindre côté plus grand que le moindre côté du premier.

4°. Que ledit ſecond triangle ait un pairement pair +1, pour ſon côté impair.

Le premier triangle qui ait toutes ces conditions eſt 457, 425, 168, car le grand côté 425 eſt l'hypotenuſe d'un autre triangle, & le petit côté 168 eſt moindre que la moitié de 425; de plus 425 ſert d'hypotenuſe au triangle 425, 297, 304, auquel le moindre côté 297 eſt plus grand que 168, & le côté impair 297 eſt pairement pair +1.

Mais on pourroit encore donner une autre condition au ſecond triangle, auquel il faut, qu'ôtant 304 de 425, & ôtant ce qui reſte de 297, il reſte enfin 168; mais ledit 168 doit néceſſairement être diviſible par 3, & deſdits trois côtez 425, 297, 304, il ne ſçauroit y avoir que l'un des deux moindres diviſible par 3, & partant afin que la derniere difference ou reſte ſoit meſuré par 3, il faut que les deux autres, comme 425, 304, excédent 3 d'une même quantité, car ainſi leur difference ſera meſurée par 3, & cette difference étant par après ôtée du troiſiéme côté qui eſt auſſi meſuré par 3, le dernier reſte ſera meſuré par 3, & cette cinquiéme condition ne ſe trouve pas dans ledit triangle 425, 297, 304, car 304 ſurpaſſe un ternaire de l'unité, & 425 le ſurpaſſe de 2.

Paſſant outre à chercher les triangles, on trouve 725 qui ſert de côté au triangle 733, 725, 108, & d'hypotenuſe au triangle 725, 333, 644, leſquels ont les cinq conditions requiſes; car pour la cinquiéme 644 ſurpaſſe de 2 un ternaire auſſi-bien que l'hypotenuſe 725: mais ſi on conſidére les finales, on verra que cela ne peut réüſſir, c'eſt-à-dire, que ſi on ôte 333 de 725, & qu'on ôte le

reſte de 644, il ne peut pas reſter 108 comme il ſeroit beſoin, ce qui ſe connoîtra ôtant ſeulement les dernieres lettres : car ſi on ôte le | 3 | de 333, du | 5 | de 725, il reſtera 2, lequel étant ôté du | 4 | de 644, reſtera 2, mais il faudroit qu'il reſtât 8 pour avoir la finale de 108.

La conſidération de ces finales eſt fort facile, & montre d'abord l'impoſſibilité quand elle provient de là. On peut auſſi juger de cette façon de recherche qu'en travaillant on trouve toujours de nouvelles facilitez & abrégez.

Mais paſſant outre à la recherche, on trouvera 925 au triangle 997, 925, 372, qui a auſſi les quatre premieres conditions avec celui qui a 925 pour hypotenuſe, ſçavoir 925, 533, 756 : mais ce dernier n'a pas la cinquiéme, joint que les finales y répugnent comme au précédent.

Le même empêchement ſe trouve auſſi à 1261, 1189, 420, & à ſon correſpondant 1189, 989, 660.

Enfin on trouve 1517 au triangle 1525, 1517, 156, & ſon correſpondant 1517, 165, 1508, qui ſont les premiers qui ont toutes les conditions requiſes, & même les finales s'accordent bien à ce qui eſt requis. On éprouvera donc ſi ôtant de 165 la difference de 1508 à 1517, on aura 156 ; j'ôte 1508 de 1517, reſte 9, lequel étant ôté de 165, reſte 156, ainſi qu'il eſt requis.

On a donc trouvé un triangle dont le moyen côté, ſçavoir 1517, eſt hypotenuſe d'un autre triangle, & dont le moindre côté 156 eſt moindre que l'un des côtez du ſecond triangle de la difference de l'autre côté à l'hypotenuſe, car 156 eſt moindre que 165 de 9, lequel 9 eſt la difference de l'autre côté 1508, & de l'hypotenuſe 1517 ; ce qu'il falloit trouver.

Ayant ce triangle 156, 1517, 1525, on aura celui qui eſt requis prenant les côtez de celui-ci pour les racines des quarrez qui le compoſent, les quarrez de 156 & 1517 ſont 24336 & 2301289, qui donnent le triangle 473304, 2276953, 2325625, auquel l'hypotenuſe eſt un quarré

dont la racine eſt 1525, & le moindre côté 473304 a un quarré pour difference avec chacun des deux autres, car ſa difference avec le moyen côté eſt 1803649 quarré de 1343, & avec l'hypotenuſe 1852321 quarré de 1361. Ainſi qu'il étoit requis.

ABREGÉ DES COMBINAISONS.

ON appelle Combinaiſon le divers aſſemblages de pluſieurs choſes.

Il y en a de deux ſortes principales, chacune deſquelles ſe diviſe encore en d'autres. De ces deux jointes enſemble on en fait une troiſiéme qui eſt mêlé de ces deux, & encore une quatriéme qu'on nommera multiple, parce qu'elle ſe fait par la multiplication de chacune de ces ſortes.

La premiere ſera nommée combinaiſon d'ordre, la deuxiéme combinaiſon de changement, la troiſiéme mêlée, & la quatriéme multiple.

La combinaiſon d'ordre contient les façons differentes dont on peut arranger & diſpoſer pluſieurs choſes; par exemple, en combien de ſortes on peut arranger quelque multitude de ſoldats, ou combien on peut faire de nombre differens avec quelques chiffres, ou combien on peut faire d'Anagrammes de quelque nom, ſoit qu'elles ſe puiſſent prononcer, ou qu'elles ne le puiſſent; & ce qu'on obſerve en ceci, & qui eſt la propriété particuliere de cette combinaiſon, eſt que les choſes une fois priſes ne doivent point être changées; comme ſi on prend cette diction *Jaques*, on conſidérera la varieté des diſpoſitions que peuvent recevoir les ſix lettres de cette diction, ſans qu'il ſoit permis de mettre quelque autre lettre nouvelle outre ces ſix, ou d'en omettre quelqu'une.

Cette combinaiſon a pluſieurs cas, ou une infinité, qui ſe réduiront à deux.

Le premier & le principal eſt quand toutes les choſes combinées ſont differentes, comme lors qu'il eſt queſtion d'arranger des hommes, pas un deſquels ne ſe peut trouver en deux lieux : ou lors qu'on fait les Anagrammes de quelque diction, dont toutes les lettres ſont differentes, comme *Charité*.

Le ſecond, qui dépend du premier, eſt quand parmi les choſes combinées, il y en a de ſemblables, comme il arrive en faiſant les Anagrammes des dictions qui ont quelque lettres ſemblables : par exemple, ſi on vouloit ſçavoir combien on peut faire d'Anagrammes de cette diction *Pierre*, entre les ſix lettres de laquelle il y a deux *e*, & deux *r* qui ſe reſſemblent.

Combinaiſon d'ordre.

L'ordre des choſes differentes ſe trouve comme il s'enſuit.

On multiplie la combinaiſon de la multitude précédente par le nombre de la multitude donnée : ainſi pour avoir l'ordre de ſix choſes, il faut multiplier l'ordre de 5 choſes par 6 ; & pour avoir l'ordre de 5, on multipliera celui de 4 par 5 ; & pour celui de 4, on prendra le produit de l'ordre de 3 par 4 ; de même pour celui de 3, on multipliera l'ordre de 2 par 3. Or l'Ordre de 2 ne peut être que 2, car deux choſes ne ſouffrent que deux diſpoſitions differentes, ſçavoir en mettant au premier lieu celle qui auparavant étoit au ſecond, comme *B*, *A*. & *A*, *B*. On pourroit dire auſſi que la combinaiſon de deux choſes ſe trouve en multipliant celle de 1, qui eſt 1 par 2.

1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6227020800	13
87178291200	14
1307674368000	15
20922789888000	16
355687428096000	17
6402373705728000	18
121645100408832000	19
2432902008176640000	20
51090942171709440000	21
1124000727777607680000	22

On trouvera cette combinaison poursuivie jusques à 64. in lib. Harmonicon. du P. Mersenne, pag. 116. & 117.

Si on veut donc trouver l'ordre de quelque multitude, il faudra chercher celui des multitudes précédentes, & faire la Table de toutes, comme on voit ici.

La colomne qui eſt du côté droit contient le nombre de la multitude des choſes dont on veut ſçavoir l'ordre, c'eſt-à-dire la differente façon de les arranger: celle qui eſt du côté gauche contient l'ordre.

Je mets donc premierement 1, tant à droite qu'à gauche, parce que l'ordre d'une choſe n'eſt qu'un; puis je mets du côté droit le nombre ſuivant 2, par lequel je multiplie l'ordre du précédent, ſçavoir 1, pour avoir 2.

Je mets après 3 au-deſſous de 2 à droit, & par ce nom-

bre je multiplie l'ordre de 2, ſçavoir 2; & on aura 6, qu'il faudra mettre près de 3 : enſuite j'écris 4 deſſous 3, & je multiplie par ce 4 l'ordre de 3, ſçavoir 6, pour avoir 24, & ainſi de ſuite comme on voit en la Table.

obie
obei
oibe
oieb
oebi
oeib
boie
boei
bioe
bieo
beoi
beio
iobe
ioeb
iboe
ibeo
ieob
iebo
eobi
eoib
eboi
ebio
eiob
eibo

Voici la differente diſpoſition qu'on peut donner à quatre choſes, afin de faire voir de quelle façon on les arrangera pour n'omettre aucune diſpoſition. On ſe propoſera premierement quelque ordre, comme en ces quatre lettres *o*, *b*, *i*, *e*. La premiere ſoit *o*, la ſeconde *b*, &c. il faut en retenant la premiere changer l'ordre des dernieres. Ainſi, ayant placé & diſpoſé les quatre lettres ſelon cet ordre, je retiens *o* que je laiſſe toujours au premier lieu, & je change les trois autres *b*, *i*, *e*, en toutes les façons poſſibles qui ſont 6, & pour ces 6, on obſervera encore la même regle; & ainſi parce que je trouve *b*, le premier des 3, je le retiens, & je change les deux autres *i*, *e*, en toutes les ſortes, qui ſont 2, ſçavoir *i*, *e*, & *e*, *i*.

Cela fait je change le *b*, & en ſon lieu je mets la lettre ſuivante, ſçavoir la troiſiéme qui eſt *i*, & on aura *o*, *i*, & enſuite je mets les deux autres *b*, *e*, dans leurs deux rangs, & enfin après *o* je mets la quatriéme lettre, ſçavoir *e*, & je change encore les deux autres *b*, *i*, en leurs deux façons.

Et parce que la quatriéme lettre eſt la derniere, & qu'on ne peut plus en mettre d'autre au ſecond lieu, je change la premiere lettre *o*, & en ſa place je mets la ſeconde *b*, & enſuite les trois autres ſelon leur ordre, ſçavoir la premiere au ſecond lieu, puis la troiſiéme & quatriéme; & la ſeconde lettre *b*, demeurant ainſi au premier lieu, on fera les ſix changemens des autres trois, ſçavoir de *o*, *i*, *e*, comme auparavant. Cela étant fait, on mettra la troiſiéme lettre *i* au premier lieu, & on fera encore les ſix variations des trois autres, *o*, *b*, *e*; & enfin on

Digitized by Google

mettra la derniere *e* au commencement, pendant que les trois autres *o*, *b*, *i*, ſeront arrangées en ſix façons.

S'il y avoit cinq lettres differentes comme *Tobie*, on auroit en la même maniere que ci-devant les vingt-quatre changemens de *o*, *b*, *i*, *e*, le *T* demeurant toûjours le premier ; puis on ôteroit le *T* du premier lieu, & en ſa place on mettroit *o*, après lequel on mettroit *T*, *b*, *i*, *e*, en vingt-quatre ſortes ; puis la troiſiéme lettre *b* tiendroit le premier lieu, & enfin la quatriéme & la cinquiéme.

De même, ſi on avoit ſix lettres, on feroit le changement des cinq dernieres en cent vingt façons, & mettant chacune des ſix lettres au premier lieu, on aura ſix fois 120, ſçavoir 720, pour les divers arrangemens des ſix choſes.

Pour ſept lettres on fera les 720 changemens des ſix dernieres, qui ſeront recommencez ſept fois, à cauſe des ſept lettres qui doivent occuper le premier lieu.

On trouvera de la même ſorte les diverſes ſituations pour les autres multitudes, ce qui donne aſſez à connoître la conſtruction de la table précedente, & la raiſon pour laquelle il faut multiplier tous les nombres & leurs produits depuis l'unité juſqu'au nombre de la multitude requiſe, pour avoir la combinaiſon de quelque multitude : car ayant à diſpoſer pluſieurs choſes d'un ordre different, on commence à operer ſur les trois dernieres ; & gardant la premiere des trois, on range les deux dernieres en deux façons : & parce qu'il y a trois lettres differentes, on mettra chacune des trois pour la premiere, & après chacune on mettra les deux autres en deux façons. D'où il s'enſuit que pour avoir la combinaiſon de trois choſes, il faut multiplier 2 par 3, dont le produit eſt 6.

Si on vient après à conſiderer quatre choſes, on a montré comme les trois dernieres ſe peuvent varier en ſix façons : mais parce que chacune de ces quatre choſes peut tenir le premier lieu, & que les trois qui reſteront ſe va-

rient en ſix ſortes, il faudra multiplier 6 par 4, pour avoir la varieté de l'ordre de quatre choſes, qui ſera 24.

De même, ſi on a cinq choſes, chacune doit être miſe la premiere, & à chacune de ces ſituations les quatre dernieres ſeront rangées en vingt-quatre ſortes: il faut donc multiplier 24 par 5. Pour avoir l'ordre de cinq choſes, qui ſera 120; & ainſi de ſuite, il faudra multiplier la combinaiſon précedente par le nombre de la multitude donnée; & cela eſt une preuve évidente qui ſert de démonſtration pour la conſtruction de la table.

Mais lorſque dans une diction il y a pluſieurs lettres ſemblables, comme en cette diction, *Beauté*; il eſt certain qu'il n'y aura pas tant de varietez en l'ordre, que ſi toutes les ſix lettres étoient differentes; & que les deux *e* qui s'y rencontrent diminuent la multitude de ces varietez.

En ce cas, il faudra prendre la combinaiſon de l'ordre des lettres ſelon leur multitude, & la diviſer par l'ordre qui appartient à la multitude des ſemblables: ainſi, pour ſçavoir combien on peut faire d'anagrammes de la diction *Beauté*, on prendra la combinaiſon de l'ordre de ſix choſes, qui eſt 720; & parce que dans la diction il y a deux lettres ſemblables, on diviſera 720 par la combinaiſon de deux choſes, qui eſt 2, le quotient 360 ſera la multitude des anagrammes requiſes.

ebene
ebeen
ebnee
eebne
eeben
eenbe
eeneb
eeebn
eeenb
enbee
enebe

De même pour cette diction, *Ebene*, on prendra 120, qui eſt la combinaiſon de 5, à cauſe de ſes cinq lettres: mais parce que parmi ces cinq lettres il y en a trois ſemblables, je diviſe 120 par la combinaiſon de 3, ſçavoir par 6, & le quotient 20 ſera la multitude des anagrammes de cette diction.

On voit ici les 20 varietez de ces cinq lettres, qui pourront donner à connoître comment on pourra faire les varietez des ſituations, quand les choſes ne ſont pas toutes differentes.

eneeb
beene
beeen
benee
bneee
nebee
neebe
neeeb
nbeee

Que s'il y avoit pluſieurs ſortes de lettres ſemblables, il faudroit diviſer la combinaiſon de toutes les lettres par celle de chaque ſorte de ſemblable, comme aux dictions, *Pierre* & *George*, auſquelles il y a ſix lettres, mais deux d'une ſorte & deux d'une autre.

Je prendrai la combinaiſon de 6, ſçavoir 720, & la diviſerai par celle de 2, & le quotient 360 encore par celle de 2, & j'aurai 180: ou bien je multiplierai la combinaiſon de 2 par celle de 2, le produit ſera 4, par lequel je diviſerai 720, & le quotient ſera 180.

Pour avoir la combinaiſon ou la multitude des anagrammes de la diction, *Ananas*, je vois qu'elle a ſix lettres: je prens donc 720, qui eſt la combinaiſon de 6; & parce qu'entre ces lettres il y en a trois d'une ſorte & deux d'une autre, je diviſe 720 par la combinaiſon de 3, ſçavoir par 6, & le quotient 120 par celle de 2, ſçavoir par 2, & j'aurai 60: ou bien je multiplie la combinaiſon de 3 par celle de 2, ſçavoir 6 par 2, & par le produit 12 je diviſe la combinaiſon de la multitude des lettres, ſçavoir 720, le quotient 60 donnera la multitude des varietez des lettres de cette diction.

Il ſemble que l'ordre demanderoit qu'on traitât enſuite de la combinaiſon de changement ou de choix: mais parce qu'on trouve ſes varietez par le moyen de la mêlée, on traitera premiérement de celle-ci, & on commencera par celle qu'on nomme générale.

Combinaiſon générale.

Cette combinaiſon eſt celle qui a été appellée mêlée, parce qu'elle contient tant l'ordre que le changement des choſes. On la peut auſſi diviſer en deux eſpeces, comme les autres, ſçavoir ſi on conſidere les choſes toutes differentes, ou bien ſi on ſuppoſe qu'elles puiſſent être toutes

ſemblables, ou qu'il y en puiſſe avoir pluſieurs ſemblables.

Cette derniere combinaiſon eſt la plus univerſelle de toutes, puiſqu'elle comprend toute ſeule tout ce qui eſt compris dans toutes les autres; car on y conſidere l'ordre comme en la premiere, & on prend les choſes dans une plus grande multitude, comme en la ſeconde; & outre cela on en peut prendre pluſieurs ſemblables ou toutes, comme ſi on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet, car par ce moyen les douze cartes pourroient être ſemblables, & ainſi on pourroit avoir douze Rois de pique; ou ſeulement neuf ou dix cartes ſemblables, & les autres differentes, & en toutes les autres façons poſſibles; & l'ordre fera voir en combien de manieres on les pourroit joüer & jetter ſur la table en toutes ces ſortes de jeux.

Cette combinaiſon ſe trouve, prenant la multitude des choſes pour l'expoſant d'une puiſſance, qui a pour racine la diverſité des choſes combinées: ainſi pour ſçavoir en combien de façons on peut avoir & arranger ou joüer les douze cartes priſes dans douze jeux de piquet de trente-ſix cartes chacun, afin qu'on en puiſſe avoir tant de ſemblables qu'on voudra, il faut prendre 36 pour racine, & 12 pour l'expoſant de la puiſſance.

Ce ſera donc la douziéme puiſſance de 36.

Si on ne prenoit qu'une carte, on n'auroit que 36 varietez.

Si on en prenoit 2, on auroit 1296 varietez, ſçavoir le quarré de 36.

Pour trois cartes, on prendroit le cube de 36. Pour quatre, le quarré quarré. Pour cinq, la cinquiéme puiſſance de 36, & ainſi des autres.

La verité de cette operation ſe peut tirer ou du raiſonnement, ou de quelque exemple. Nous en avons un exemple aux chiffres, car il eſt certain qu'on les prend & diſpoſe en toutes les façons poſſibles, ſoit ſemblables ou differentes & priſes dans un plus grand nombre, & on a auſſi égard

à l'ordre : or les nombres ſe ſuivent, & ne different de proche en proche que de l'unité ; d'où il s'enſuit que le dernier & plus grand nombre de ceux qui ont une certaine multitude de lettres, comprendra tous les précedens ; par exemple, le plus grand nombre qui s'écrive par deux lettres ou chiffres eſt 99, qui comprend non ſeulement les nombres de deux lettres, mais auſſi ceux qui n'en ont qu'une ; mais il faut conſiderer que parmi ces nombres, il n'y en a aucun qui ait un zéro du côté gauche, & en la place des dixaines : on le pourra donc ſuppoſer au-devant des neuf premiers chiffres où il ne ſignifie rien, en prenant 01, 02, &c. & ainſi on auroit 99, nombres de deux lettres. Mais il y en manque encore un, pour avoir toutes les combinaiſons des dix caracteres pris deux à deux : car celui qui ſeroit fait de deux zero, ſçavoir 00, n'y eſt point ; il faudra donc ajoûter 1 à 99 pour avoir en tout 100 varietez, que peuvent ſouffrir deux choſes priſes dans dix. Or le nombre 100 contient 10 & 2, car 10 eſt ſa racine, & 2 ſon expoſant.

Les mêmes nombres ou chiffres pourroient encore fournir un autre exemple, ſçavoir ſi on prenoit les deux choſes dans neuf differentes, comme ſi on cherchoit tous les nombres de deux chiffres qui n'ont point de zero ; car par ce moyen on n'aura que neuf lettres : or en chaque dixaine il y a neuf nombres qui n'ont point de zero, & il n'y a que neuf dixaines qui ayent deux lettres, car les nombres de la premiere n'ont qu'une lettre : ſi donc on multiplie 9 par 9, on aura 81, qui eſt la varieté requiſe de deux choſes priſes dans neuf ; c'eſt la même choſe aux autres quantitez. Mais voici comme on fera voir la verité de cette régle.

Pour ne point ſortir de notre exemple de neuf, on voit premierement que ſi on ne prend qu'une ſeule choſe dans neuf differentes, on n'aura que 9 varietez : mais ſi on prend deux choſes, puiſqu'après chacune des neuf choſes on peut mettre chacune des mêmes l'une après l'autre ; pour

avoir cette varieté, il faudra multiplier 9 par 9, & on aura 81, qui eſt le quarré de 9.

Que ſi on prend trois choſes dans les neuf, on pourra devant chacune des 81 combinaiſons précedentes mettre chacune des neuf choſes : il faudra donc, pour avoir la varieté de trois choſes priſes dans neuf, multiplier 81 par 9, pour avoir 729 cube de 9.

Et ainſi continuant, on fera voir que pour avoir la varieté de quatre choſes priſes dans neuf, il faut multiplier 729 par 9, pour avoir le quarré quarré de 9, parce que devant chacune des 729 façons dont on aura pris & arrangé trois choſes, on pourra mettre chacune des neuf dans leſquelles on les a priſes.

De même, pour cinq choſes priſes dans neuf, on prendra la cinquiéme puiſſance de 9, &c.

Il faut ſeulement prendre garde que la diverſité des choſes qu'on prend, comme eſt ici 9, ſert toûjours de racine, & la multitude des mêmes choſes ſert d'expoſant.

Combinaiſon de changement ou de choix.

La ſeconde eſpece de combinaiſon eſt nommée de changement, ou de choix, à la difference de la premiere, où on ſuppoſe que les mêmes choſes demeurent toûjours : mais en celle-ci, on les varie, & on en fait comme divers amas pris dans une grande multitude. Par exemple, ſi d'un Régiment de 1000 hommes, on en détache 100, & qu'on veuille ſçavoir en combien de ſortes on peut faire une Compagnie de 100 ſoldats pris dans un Régiment de 1000 ; ou bien ſi on veut ſçavoir en combien de ſortes on peut avoir les douze cartes du jeu de piquet, où il y en a trente-ſix ; on voit manifeſtement que l'ordre ne fait rien à cette multitude, car la differente diſpoſition des cartes dans la main ne change rien au jeu, encore qu'on puiſſe bien avoir égard à l'ordre tant aux ſoldats en les arrangeant

geant diverſement, qu'aux cartes en les joüant de pluſieurs manieres.

Cette combinaiſon ſera auſſi diviſée en deux eſpeces comme la précedente, ſçavoir celle en laquelle toutes les choſes ſont differentes, comme en l'aſſemblage des ſoldats, & celle en laquelle il ſe trouve pluſieurs choſes ſemblables; comme ſi on avoit un cent de diverſes ſortes de fruits, ſçavoir de chacune eſpece un cent, & qu'on voulût ſçavoir en combien de façons on pourroit remplir un panier d'un cent de ces fruits, ou bien ſi on avoit enſemble douze jeux de piquet, & qu'on voulût voir en combien de ſortes on pourroit avoir douze cartes à les prendre dans ces douze jeux.

Pour trouver la multitude des choix, il faut remarquer que toute combinaiſon mêlée étant diviſée par l'ordre, donne la combinaiſon de changement, pourvû que toutes les choſes ſoient differentes, ou qu'il y en ait toûjours autant de ſemblables.

Exemple. Si on avoit ſix paniers dont chacun fût plein d'une eſpece de fruit different des autres, mais égaux entr'eux, & qu'on voulût voir en combien de façons on pourroit prendre un cent de ces fruits dans les ſix paniers, ſuppoſant toûjours que dans chaque panier tous les fruits ſoient égaux, & qu'il n'y ait rien à choiſir, de ſorte que chaque eſpece de fruit ſoit reputée pour un même fruit, ainſi que les lettres de l'Alphabet, chacune deſquelles ne differe en rien de ſa ſemblable en ce qui regarde l'uſage qu'on en fait dans les dictions; & ainſi dans la diction *Anna*, le premier *a* n'eſt pas autre que le ſecond: or on entend que les fruits d'une même eſpece ſoient ici pris en la même façon que les lettres.

Si donc on veut avoir la varieté des ſortes de choix qu'on peut faire d'un cent de ces fruits dans les ſix paniers, dans chacun deſquels il faut ſuppoſer auſſi qu'il y ait pour le moins un cent de fruits, afin que ſi on veut on puiſſe

prendre un cent de ces fruits tous égaux, il faut faire la combinaiſon générale de cent choſes priſes dans ſix ſortes de choſes, ſi on y comprend auſſi l'ordre.

Et parce que la varieté des choſes eſt 6, ce nombre ſera la racine, & 100 qui eſt la multitude des choſes qu'on prend ſervira d'expoſant. On prendra donc la centiéme puiſſance de 6 pour la varieté des diverſes façons dont on pourroit prendre & arranger les fruits pris dans les ſix paniers.

Et parce que la combinaiſon générale contient la combinaiſon de l'ordre en toutes les façons poſſibles, tant des choſes ſemblables que des differentes, dont l'ordre eſt different, on ne la peut pas diviſer par l'ordre; car la ſomme de pluſieurs diviſeurs donne un autre quotient que s'ils étoient ſéparez, c'eſt-à-dire, que ſi on diviſoit ſéparément par chacun d'eux; joint que quelques-unes de ces varietez n'ont point d'ordre, c'eſt-à-dire, ne ſe peuvent mettre qu'en une ſeule façon, comme lorſque les choſes qu'on a priſes ſont toutes ſemblables: & les autres, où il ſe trouve pluſieurs choſes ſemblables, ont fort peu de varietez d'ordre; par exemple, ſi on a quatre choſes, elles ſeront conſiderées confuſément, ſoit qu'on les prenne toutes differentes, comme *a*, *b*, *c*, *d*, ou deux ſemblables, & deux autres differentes, comme *a*, *a*, *b*, *c*, ou trois ſemblables, & une autre comme *a*, *a*, *a*, *b*, ou deux d'une ſorte & deux d'une autre, comme *a*, *a*, *b*, *b*, ou enfin toutes quatre ſemblables comme *a*, *a*, *a*, *a*, ou *b*, *b*, *b*, *b*.

A, *b*, *c*, *d* ſe change en vingt-quatre façons; *a*, *a*, *b*, *c* en douze; *a*, *a*, *a*, *b* en quatre; *a*, *a*, *b*, *b* en ſix, & enfin *a*, *a*, *a*, *a* ne peut être diſpoſé que d'une ſorte, & n'a aucun ordre: mais voici comme on en ſéparera l'ordre.

Nous avons dit que la combinaiſon de changement étoit de deux ſortes: l'une où toutes les choſes ſont differentes comme aux douze cartes du piquet; l'autre où elles peuvent être indifferemment, ou toutes differentes, ou

toutes ſemblables, ou en partie diſſemblables & en partie ſemblables, comme ſi on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet.

Pour l'une & l'autre ſorte de choix, il faut faire douze nombres par multiplication, compris le premier qu'on multiplie, qui eſt 36, à cauſe qu'il y a trente-ſix ſortes de choſes: mais pour le premier où tout eſt different, il faut multiplier par les nombres inferieurs, ſçavoir par 35, & le produit par 34, &c. & pour le ſecond qui peut avoir des choſes ſemblables, il faut multiplier par les ſuperieurs, ſçavoir par 37, 38, &c.

Ce qu'il faut obſerver en ceci, eſt que le nombre par lequel on commence les multiplications eſt celui de la varieté, & la multitude des nombres qu'il faut trouver par les multiplications le premier compris, eſt la multitude des choſes.

Ainſi voulant avoir toutes les façons du jeu de piquet, ſçavoir, de douze cartes priſes dans trente-ſix, en ſorte qu'elles ſoient toutes differentes, je prens 36 pour le terme & commencement des multiplications; & parce que toutes les cartes doivent être differentes, il faudra multiplier 36 par les nombres précedens moindres, ſçavoir par 35, & le produit 1260 par 34, pour avoir 42840, qu'il faudra encore multiplier par 33, & continuer tant qu'on ait douze nombres, ce qui ſe fera après onze multiplications, & le dernier nombre par lequel il faudra multiplier ſera 25, ſçavoir 11 moins que 36; car on prend toûjours un moins que la multitude des choſes, à cauſe que le nombre de la varieté, ſçavoir 36, eſt pris pour le premier nombre.

Le dernier produit eſt 5995556209843 20000, qui contient la varieté de douze cartes priſes en trente-ſix avec l'ordre, c'eſt-à-dire ſuppoſant qu'on les arrange auſſi en toutes les façons poſſibles, qui eſt le premier cas, ou premiere ſorte de la combinaiſon mêlée, qui ſuppoſe tou-

tes les choſes differentes, mais priſes en un plus grand nombre, & ſuppoſant auſſi l'ordre.

Que ſi on veut avoir les jeux de piquet ſans l'ordre, puiſque cet ordre ne change point le jeu, il faudra diviſer le nombre trouvé 599555620984320000 par la combinaiſon de l'ordre de douze choſes, ſçavoir par 479001600, & on aura 1251677700 varietez de jeux de piquet.

Pour ce qui eſt de joüer & de jetter les cartes ſur la table, il faut avoir égard à l'ordre, & chaque jeu ſe peut joüer en 479001600 ſortes, car telle eſt la combinaiſon de l'ordre de douze choſes, & ainſi pour avoir en tout en combien de ſortes on peut joüer les douze cartes priſes en 36, il faut multiplier 1251677700 par 479001600, pour avoir le nombre ci-devant trouvé 599555620984320000, qui montre en combien de façons on peut avoir & joüer les douze cartes.

Voilà pour ce qui appartient à la combinaiſon de changement, & à la combinaiſon mêlée lorſque toutes les choſes ſont differentes.

Car la mêlée, où l'ordre eſt compris, ſe trouve comme on a vû multipliant le nombre de la varieté des choſes, comme 36 par les nombres précedens 35, 34, &c. tant qu'on ait autant de nombres ou produits compris 36, que la multitude des choſes, qui eſt 12, & prenant le dernier produit pour le nombre requis.

Et la combinaiſon de changement ſe trouve diviſant ce nombre, ſçavoir le dernier produit, par le nombre de la combinaiſon d'ordre de la multitude des choſes, qui eſt ici 12.

Reſte à donner un exemple de la même combinaiſon de changement, lorſque les choſes peuvent être ſemblables.

Que les douze cartes ſe prennent dans douze jeux de piquet de trente-ſix cartes chacun, afin qu'elles puiſſent être toutes ſemblables, il faudra, comme on à dit ci-devant,

multiplier 36 par les nombres ſuivans, ſçavoir par 37, 38, &c. tant qu'on ait 12 nombres ou produits, ſçavoir autant que la multitude des choſes, & ainſi le dernier nombre qui multipliera ſera 47, puis diviſer le produit par l'ordre du nombre de la multitude, ſçavoir par l'ordre de 12.

De même pour les ſix paniers de fruit dans tous leſquels on choiſit cent fruits à diſcrétion, avec liberté de prendre ſi on veut tous les cent de même eſpece, & d'un même panier.

Parce que le nombre de la varieté eſt 6, je prens 6 pour le terme ou commencement des multiplications; je le multiplie donc par 7, & le produit 42 par 8, & le produit par 9, tant qu'on ait 100 nombres, compris 6, & ainſi le dernier nombre qui multipliera ſera 105, qui ſurpaſſe 6 de 99, ſçavoir de 1 moins que le nombre de la multitude 100, à cauſe que 6 eſt compté pour le premier nombre; & le dernier produit étant diviſé par l'ordre de cent choſes, qui eſt la multitude des choſes qu'on prend, donnera le nombre requis.

Que ſi on avoit des tables faites de la combinaiſon d'ordre, qui eſt la plus ordinaire & la plus en uſage, on y pourroit prendre la combinaiſon de 105, ſçavoir de 1 moins que la ſomme des deux nombres de varieté & de multitude, & la diviſer par la combinaiſon de 5, ſçavoir de 6—1; car ſi on avoit commencé par 2 à multiplier, & qu'on eût continué juſques à 105, on auroit la combinaiſon de 105: mais parce qu'on n'a commencé que par 6, il s'enſuit que le produit devroit être multiplié par la combinaiſon de 5 pour parvenir à celle de 105; & par conſequent, ſi on diviſe celle de 105 par celle de 5, on aura le nombre requis, qui doit être diviſé par celle de 100, comme il a été dit.

Mais parce que de ſi grandes diviſions & multiplications ſont ennuyeuſes, on ſe pourra ſervir du moyen ſuivant pour ſe paſſer de la diviſion, & diminuer beaucoup les multiplications.

Nous prendrons l'exemple des jeux de piquet dans les deux façons précedentes.

1° On prend douze cartes dans trente-ſix toutes differentes, & on demande en combien de ſortes je puis avoir les douze cartes : parce que 36 eſt la varieté des choſes, il me ſervira de terme ; & parce qu'il y a douze choſes, je prens 12 nombres, compris 36 ; car la multitude des nombres qui ſe multiplient doit ſuivre la multitude des choſes qui ſe combinent : & parce que les cartes ſont toutes differentes, & qu'il n'y en a point de ſemblables, je prens les nombres moindres que 36, comme on voit ici, ſçavoir 36, 35, 34, &c. le produit deſquels il faudroit diviſer par la combinaiſon d'ordre de douze choſes, laquelle combinaiſon ſe trouve, en multipliant l'un par l'autre tous les nombres juſqu'à 12, ſçavoir 1, 2, 3, &c.

Puis donc que le produit des nombres inferieurs doit diviſer celui des ſuperieurs, il faut que les inferieurs ſe trouvent tous ſéparément dans les ſuperieurs, autrement leur produit ne diviſeroit pas l'autre grand produit.

Que les inferieurs ſoient donc ôtez des ſuperieurs, & la diviſion ſera faite, comme on voit ici.

7 9
36, 35 : 34, 33, 32, 31, 36, 29, 28, 27, 26, 25.
2 3
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

Je conſidere donc les ſuperieurs, & je trouve premierement 36, qui eſt le produit de 3 & 12 ; j'ôte donc 36 de la ligne ſuperieure, & 3 & 12 de l'inferieure.

Je viens à 35, qui eſt produit par 5 & 7 ; j'ôte donc 35 d'un côté, & 5 & 7 de l'autre.

34 eſt fait de 2 & 17 ; mais parce que 17 n'eſt point en la ligne inferieure, je paſſe à une autre, & conſidere 33, qui eſt produit par 3 & 11 ; j'ôte donc 33, & de la ligne inferieure j'ôte 3 & 11 ; mais parce que le nombre 3 ne s'y trouve plus, je l'ôte de quelque compoſé de la même ligne

inferieure, comme de 9, & je remets un 3 deſſus, parce que 9 eſt fait & produit de deux 3.

3 2 eſt fait de 4 & 8; j'ôte donc 3 2 de la ligne ſuperieure, & 4 & 8 de l'inferieure. | 3 1 eſt nombre premier.

3 0 eſt fait de 3 & 10; j'ôte donc 3 0, & de la ligne inferieure j'ôte 3 & 10, ſçavoir le 3 que j'avois mis ſur le 9.

Il ne reſte plus en bas que 2 & 6 : le 6 eſt fait de 2 & 3; j'ôte donc 3 de quelque nombre de la ligne ſuperieure, comme de 27, reſte 9, que j'écris deſſus 27; & ôtant ainſi le 3 de 6, reſte 2, que j'écris ſur 6, (car ici, où il eſt queſtion de parties qui font le nombre par multiplication, ôter un nombre c'eſt diviſer par ce nombre.)

Enfin il reſte en bas 2 & 2, qui font 4, que j'ôte de quelque nombre de la ligne ſuperieure, comme de 28, reſte 7, que j'écris deſſus, & j'ôte tant 28 que les deux 2 de la ligne inferieure.

Reſte donc en la ligne ſuperieure à multiplier, 34, 31, 29, 7, 9, 26, 25, l'un par l'autre, dont le produit fait 1251677700 pour la diverſité des jeux de piquet, comme on avoit trouvé ci-devant.

Que ſi on prend les douze cartes dans douze jeux de trente-ſix cartes chacun, les douze cartes pourront être ſemblables : il faut donc prendre 12 nombres, ſuivant la multitude des cartes, à commencer par 36, qui repréſente la varieté des cartes, & pourſuivant par les nombres plus grands, comme on voit ici, il faudroit diviſer le produit des ſuperieurs par celui des inferieurs : mais pour épargner cette diviſion, on ôtera les ſemblables comme ci-devant, ſçavoir pour 36, on ôtera 3 & 12.

19 23

36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47.

2

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

Pour 40. | 4 & 10 pour 42. | 6 & 7. pour 44, 11 & 4.

Mais parce qu'il n'y a point de 4, on le prendra dans 8,

& on mettra un 2 deſſus. Pour 45 on ôtera 5 & 9, & il reſtera 2 & 2 en la ligne inferieure : on en ôtera l'un de 38, & l'autre de 46, reſtera 19 & 23, qu'on écrira deſſus.

Reſtera donc 37, 19, 39, 41, 43, 23, 47, qu'il faut multiplier l'un par l'autre ; le produit 52251400851 ſera la varieté requiſe des jeux qu'on peut avoir, ſçavoir de douze cartes priſes dans douze jeux de trente-ſix cartes chacun.

Corollaire premier.

De ce qui a été dit, il s'enſuit que tout nombre qui dénote la varieté des choſes differentes ſans l'ordre, dénote auſſi la varieté de quelques autres, entre leſquelles toutes ou quelques-unes peuvent être ſemblables pareillement ſans l'ordre, exemple.

Le nombre qui montre la varieté de douze cartes priſes dans trente-ſix, montre auſſi la varieté de douze cartes priſes dans douze jeux de vingt-cinq cartes chacun ; c'eſt-à-dire, ſuppoſant douze jeux ſemblables, chacun deſquels auroit vingt-cinq cartes differentes.

La raiſon ſe tire de l'opération, car aux deux cas des cartes differentes ou ſemblables, on prend le nombre de la varieté pour le premier ; & ſi les choſes ſont differentes, on prend les nombres moindres : que ſi elles peuvent être ſemblables, on en prend autant qui ſoient plus grands que le nombre de varieté : mais ſi du grand nombre comme 36, on deſcend au moindre 25, & qu'on multiplie les nombres qui ſont entre deux, comme il a été dit, on aura le même produit, que ſi on prend 25 pour le nombre de la varieté, & qu'on monte juſqu'à 36 : mais le premier ſe fait quand les choſes ſont differentes, & le ſecond quand elles peuvent être ſemblables : donc un même nombre montre la combinaiſon des choſes differentes, & de celles auſſi qui peuvent être ſemblables, en le diviſant par la combinaiſon d'ordre de douze choſes ; mais des deux nombres

nombres qui ſont les extrêmes de ceux qui le multiplient, le plus grand ſera la variété des choſes quand elles ſont toutes differentes, comme 36; & le moindre comme 25, quand les choſes peuvent être toutes ſemblables.

De même, le nombre qui repréſente la diverſité ou combinaiſon de douze cartes priſes en douze jeux de trente-ſix cartes chacun, montre auſſi la combinaiſon de douze cartes priſes en quarante-ſept.

Ainſi pour paſſer des cartes ſemblables aux differentes, on change la variété des cartes, & on prend le douziéme nombre en augmentant ſi on ſe ſert de douze cartes chaque fois, & au lieu de 36, on aura 47.

Mais pour paſſer des choſes differentes aux ſemblables, il faut prendre le douziéme nombre en diminuant, & au lieu de 36, on prend 25, car le nombre de la multitude, ſçavoir 12, ne change point.

Corollaire ſecond.

Lorſqu'on prend les douze cartes dans douze jeux de cartes, afin qu'elles puiſſent être toutes ſemblables, on les peut conſiderer avec l'ordre, ou ſans l'ordre: ſi on y met l'ordre, il ſe faut ſervir des puiſſances quarrées; ſi on n'y met point l'ordre, on ſe ſervira des puiſſances triangulaires.

On nomme ici puiſſance quarrée celle qui ſe fait par multiplication de la racine par elle-même, puis du produit par la même, &c. comme ſont les puiſſances ordinaires.

On voit une table deſdites puiſſances triangulaires juſqu'à la douziéme puiſſance de 25. in lib. Harmonicon, du P. Merſenne, page 136.

On nomme puiſſance triangulaire celle qui ſe fait par l'addition des puiſſances qui ont 1 moins d'expoſant depuis la premiere, qui eſt 1, juſques à celle qui a pareille racine: ainſi la ſixiéme puiſſance triangulaire de 5 eſt la ſomme des cinq premieres cinquiémes puiſſances, & la cinquiéme puiſſance de 5 eſt la ſomme des cinq premieres quatriémes puiſſances, & la quatriéme puiſſance de 5 eſt

la ſomme des cinq premiers tétraédres, ou troiſiémes puiſſances, & le tétraédre de 5 eſt la ſomme des cinq premiers triangles, comme le cinquiéme triangle, ou le triangle de 5 eſt la ſomme des cinq premiers nombres.

En chaque ſorte on prend pour racine la variété des choſes, & pour expoſant leur multitude : ainſi pour avoir les douze cartes lorſqu'elles peuvent être ſemblables avec l'ordre, on prend la douziéme puiſſance quarrée de 36, parce qu'il y a de trente-ſix ſortes de cartes ; mais ſi on prend les mêmes douze cartes ſans y joindre l'ordre, il faudra prendre la douziéme puiſſance triangulaire de 36.

Corollaire troiſiéme.

On pourra tirer de là une régle bien facile pour avoir les puiſſances triangulaires. On demande, par exemple, la ſixiéme puiſſance triangulaire de 5, la racine eſt 5, & l'expoſant eſt 6, on prendra ſix nombres de ſuite dont la racine 5 ſera le moindre, ſçavoir 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; il les faut multiplier l'un par l'autre, & diviſer le produit par l'ordre de la multitude des nombres, qui eſt repréſentée par l'expoſant 6, & cet ordre eſt 720, ou bien, pour éviter la diviſion, on ôtera de ces ſix nombres, les ſix nombres premiers, 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme on a vû ci-devant, & il reſtera 7, 8, & 10, dont le produit 210 eſt la puiſſance requiſe, ſçavoir la ſixiéme puiſſance triangulaire de 5.

	3.
5. 6. 7. 8. 9. 10.	
1. 2. 3. 4. 5. 6.	

Déterminer en combien de façons trois dez peuvent faire leurs points.

POur dire en général combien ils peuvent faire de divers points, il faut cuber 6, & l'on a 216 ; mais pour ſçavoir en particulier comment chaque point ſe peut faire, nous diſons ainſi. Depuis 3 juſqu'à 18 nous avons ſeize nombres, les huit premiers ſe rapportent aux huit der-

niers, c'eſt-à-dire que 3 & 18 ſont égaux à 4 & 17; 5 & 16 valent 6 & 15; 7 & 14 valent 8 & 13, &c. Or pour avoir en combien de manieres chaque nombre peut venir: pour les ſix premiers, ou pour les ſix derniers, il faut prendre les ſix premiers triangles, ainſi l'on pourra amener 3 ou 18 en une ſorte, car le premier triangle eſt 1: 4 ou 17 en trois ſortes, car 3 eſt le ſecond triangle: 5 ou 16 en ſix façons, car le troiſiéme triangle eſt 6; 6 ou 15 en dix ſortes, car 10 eſt le quatriéme triangle: 7 ou 14 en quinze ſortes, parce que 15 eſt le cinquiéme triangle: 8 ou 13 en vingt & une ſortes, d'autant que 21 eſt le ſixiéme triangle; & voilà pour les ſix premiers, & pour les ſix derniers. Pour les quatre reſtans, ſçavoir 9, 12, 10, 11. Pour 9 & 12, il faut prendre le quarré de 5, c'eſt-à-dire 25, & pour 10 & 11, il faut prendre le cube de 3, qui eſt 27, & ces deux nombres 25 & 27 déterminent les diverſes manieres dont ſe trouveront ces quatre derniers. Or toutes ces façons differentes, ſçavoir, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, étant jointes enſemble, font 108, & les doublant nous auront 216, qui eſt le cube de 6, que nous avons pris au commencement.

Queſtion ſur la regle d'intereſt.

UN homme met un ducat à la Banque à multiplier pour 32 ans, à la charge d'en avoir les intérêts, & intérêt d'intérêt à raiſon de 5 pour 100. On demande à combien ſe montera le principal & les intérêts au bout de ce temps.

L'intérêt eſt $\frac{1}{20}$ par an; donc au bout de l'an le principal avec l'intérêt ſe montera à $\frac{21}{20}$ de ducat.

Pour les années ſuivantes il faut prendre les puiſſances du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & en faire une fraction, & le nombre des années ſera l'expoſant de ces puiſſances: il faudra donc prendre la trente-deuxiéme puiſſance de 21 & de 20 pour le principal & les intérêts de 32 ans. J'ai pris 32 pour la commodité de la

multiplication, à cauſe qu'il n'y aura qu'à prendre le quarré des nombres précédens. Ainſi

Pour 2 ans on aura $\frac{441}{400}$ de ducat.

Pour 4 ans $\frac{194481}{160000}$, qui ſe trouve prenant le quarré de $\frac{441}{400}$.

Pour 8 ans $\frac{37822859361}{25600000000}$.

Pour 16 ans $\frac{1430568690241985328321}{655360000000000000}$.

Enfin pour 32 ans on aura $\frac{2046526777500669368329342638102622164679041}{4294967296000000000000000000000000}$, qui font $4\frac{3}{4}$ ducats peu plus: le profit ſera donc $3\frac{3}{4}$ ducats & un peu plus, & ainſi il ſera preſque quadruple du principal.

Si on vouloit continuer à calculer l'intérêt pour quelques autres années, il faudroit multiplier le numérateur par 21, & le dénominateur par 20 : mais pour éviter la difficulté de ces grands nombres, il faut retrancher une partie de la fraction qui n'apporte pas un profit conſidérable, & prendre ſeulement $\frac{2546526777}{4294967296}$. Donc pour 33 ans on auroit $\frac{42977062375}{8589934592}$, qui eſt un peu plus de 5 ducats, qui feroient 4 ducats de profit. Et ſi on l'y laiſſoit encore une autre année, on auroit $\frac{902518308875}{171798691840}$, qui ſont 5 ducats $\frac{1}{4}$ peu plus, c'eſt donc 4 ducats $\frac{1}{4}$ de profit.

Des Combinaiſons multiples.

ON a conſideré de deux ſortes de Combinaiſons; l'une d'ordre, & l'autre de varieté ou changement, chacune deſquelles peut être multipliée: en voici des exemples.

Six choſes ſe peuvent ranger en 720 façons: que ce ſoient par exemple ſix ſoldats à qui je donnerai ſix ſortes d'armes: parce que les armes ſe peuvent encore combiner en 720 façons, il faudra prendre le quarré de 720, & on aura 518400 façons de les ranger & de les armer: mais ſi avec cela on leur donne ſix ſortes de livrées, il faudra prendre le cube de 720 pour la varieté dont on les pourra ranger avec leurs diverſes armes & livrées, ce qui ſe fera en 373248000 façons.

Digitized by Google

Mais ſi on n'avoit pas autant de ſortes d'armes & de livrées que de ſoldats ; par exemple, ſi on n'avoit que de quatre ſortes d'armes, & que de l'une des ſortes on en eût trois, comme ſi on avoit trois épées, un mouſquet, une pique & une hallebarde, & qu'on n'eut que trois ſortes de livrées, ſçavoir deux de chaque ſorte : il faudra prendre pour les armes la combinaiſon de ſix choſes entre leſquelles il y en auroit trois ſemblables : or on a fait voir que pour avoir cette combinaiſon, il faut diviſer la combinaiſon de ſix, ſçavoir 720, par ſix qui eſt la combinaiſon de trois choſes ſemblables, & on aura 120 pour les diverſes façons dont on peut armer ces ſoldats. On multipliera donc 720 par 120, & on aura 86400 manieres de ranger & d'armer ces ſoldats.

Pour leurs livrées, parce qu'il y en a deux de chaque ſorte & de trois ſortes en tout, il faudra diviſer 720 par la combinaiſon de deux choſes répétées trois fois, qui eſt huit, parce que deux multipliant deux fait quatre, qui étant encore multiplié par deux donne huit : diviſant donc 720 par huit, on aura 90, par lequel il faudra multiplier le produit qu'on vient d'avoir, qui eſt 86400, & on aura en tout 7776000 manieres d'arranger ces ſoldats avec leurs armes & leurs livrées differentes.

Que ſi au contraire on avoit plus de ſortes d'armes & de livrées qu'il n'y a de ſoldats ; par exemple, ſi on avoit ſept ſortes d'armes & huit ſortes de livrées qu'on voulût donner à ſix ſoldats en toutes les manieres poſſibles, on ſe ſerviroit de la combinaiſon de variété : voici comme ſe fait cette combinaiſon.

Pour les armes, parce qu'il y en a de ſept ſortes, mais qu'on n'en prend que ſix à chaque fois, on multipliera 7 par les nombres moindres juſqu'à ce qu'on ait 6 nombres, ſçavoir juſqu'à 1 : on multipliera donc 7 par 6, le produit 12 par 5, puis le produit par 4, 3, & 2, on aura 5040, qui eſt le même nombre que celui de la combinaiſon d'or-

dre de ſept choſes, parce que 1 ne multiplie point.

Pour les livrées, parce qu'il y en a de huit ſortes, & qu'on ne ſe ſert que de ſix, il faudra prendre le changement de ſix choſes priſes dans huit, qui ſe trouve en multipliant l'un par l'autre ſix nombres commençant par 8 en diminuant, ſçavoir 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le produit eſt 20160 y compris l'ordre.

Il faudra donc multiplier 720, qui montre la quantité de façons dont on peut ranger ſix ſoldats, par 5040, qui eſt la variété de leurs armes, & le produit 3628800 (qui contient l'ordre des ſoldats & des diverſes manieres dont on les peut armer) par 20160, qui eſt la varieté des livrées, & on aura 731566080000, qui montre toutes les façons d'arranger ces ſoldats, & de leur donner diverſes armes & livrées.

La combinaiſon de variété ſe peut auſſi multiplier par une autre combinaiſon de variété.

On a ſix Places à pourvoir de Commandans, mais on n'en veut placer d'abord que trois : on demande en combien de manieres on peut placer dans trois de ces Places trois de ces Commandans pris dans ſix qui ſont arrêtez. On prendra l'ordre de trois choſes priſes dans ſix, multipliant ſix par cinq, & le produit par quatre ; puis diviſant le produit 120 par ſix, qui eſt la combinaiſon d'ordre de trois choſes, on aura 20 pour le changement de trois choſes priſes dans ſix ; ou par abregé on multipliera ſeulement cinq par quatre. La combinaiſon de trois Places priſes dans ſix eſt pareillement 20 ; on multipliera donc 20 par 20, & on aura 400 façons de placer trois de ces Commandans chacun dans l'une des ſix Places.

Or il n'importe pas qu'il y ait autant de Places que de Commandans : il y en peut avoir plus ou moins, & la régle ſera toujours la même.

Si par exemple, il n'y avoit que cinq Places, il faudroit prendre la variété de trois choſes priſes dans cinq, qui eſt

60, l'ordre compris, qui étant diviſé par ſix qui eſt l'ordre de trois choſes, on a dix, lequel multiplié par 20, qui eſt la combinaiſon de trois Commandans pris dans ſix, on auroit 200 façons de les placer. De même s'il y avoit huit Places on prendroit la combinaiſon de trois pris dans huit, qui eſt 336 compris l'ordre, qui étant diviſé par ſix, qui eſt l'ordre de trois choſes, donne 56, qui multiplié par 20 donneroit 1120 façons de placer ces trois Commandans.

Il y a quelqu'autre choſe à conſidérer dans la combinaiſon pour l'aſſemblage des lettres qui forment les dictions : il y en a quelques-unes qui ne ſe peuvent prononcer quand elles ſont enſemble, c'eſt pourquoi il eſt néceſſaire de les ſéparer.

On veut ſçavoir, par exemple, combien on peut faire de dictions des huit lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *i*, *o*, *ſ*, à telle condition que les trois *b*, *c*, *d*, ne ſe trouvent jamais enſemble. Il faudra conſidérer ces trois lettres comme une ſeule, & ainſi il n'y aura que ſix choſes, dont la combinaiſon eſt 720 : mais parce que ces trois lettres ſe peuvent trouver de ſuite en ſix façons, il faut multiplier 720 par ſix ; le produit eſt 4320, qu'il faut ôter de la combinaiſon de huit choſes qui eſt 40320, reſtera 36000 dictions ou anagrammes qu'on pourra faire avec ces huit lettres ſans que *b*, *c*, *d*, ſe trouvent enſemble.

On pourroit encore demander que deux de ces conſones ne ſe trouvaſſent jamais au commencement ni à la fin des dictions. Pour le trouver il faut voir combien il ſe fait de changemens pendant que deux de ces lettres ſont au commencement ou à la fin ; & parce qu'il reſte ſix lettres, on aura 720 changemens : mais entre ces 720 il y en a 120 auſquels la troiſiéme conſone ſe trouve contre les deux autres, & cela eſt compris dans les 4320 qu'il a fallu ôter de 40320 ; il faut donc ôter 120 de 720, reſte 600 qu'il faudra multiplier par 12, parce qu'on peut prendre

les deux lettres dans les trois en trois façons ; & à cauſe de l'ordre il faudra multiplier trois par deux ; & parce qu'il ne faut pas auſſi que les deux lettres ſe trouvent à la fin, on aura douze variétez, qui multipliées par 600 donnent 7200 qu'il faut ôter de 36000, reſtera 28800 anagrammes.

Pour ſçavoir en quel rang eſt une diction dans le grand nombre de la combinaiſon générale à commencer à celles d'une lettre, puis à celles de deux, de trois, & ainſi du reſte, juſqu'au nombre des lettres dont notre diction ſera compoſée, comme l'on fait aux chiffres où l'on commence à compter par les nombres qui n'ont qu'un chiffre, puis on vient à ceux qui en ont deux, &c. il faut voir la quantiéme & la premiere lettre à main gauche dans l'alphabet, & de combien de lettres eſt compoſée la diction : par exemple, je veux ſçavoir le quantiéme eſt ce mot *Aſer*, qui eſt de quatre lettres ; dont il y en a 234256, & les autres dictions moindres y étant ajoutées, ſçavoir celles de 3, 2, & une lettre, il y en aura 245410. Pour ſçavoir donc le quantiéme il eſt dans ce dernier nombre à commencer à compter par *a*, puis *b*, &c. en après *a a*, *a b*, &c. je prens la premiere lettre *A*, qui eſt la premiere de toutes, & ne vaut qu'un mille, qui vaut 10648 (nombre des mots de trois lettres) puis je viens à *ſ*, qui eſt la dix-ſeptiéme centaine, & partant je multiplie 484 par 17, le produit eſt 8228 ; puis à *e*, qui eſt la cinquiéme dixaine dont chacune vaut 22, qui multiplié par cinq, font 110 ; la derniere lettre eſt *r*, qui eſt la ſeiziéme, puis j'ajoute ces quatre ſommes enſemble, ſçavoir 10648, 8228, 110 & 16, le total eſt 19002 ; de ſorte que *Aſer* eſt le 19002 mot dans le nombre de 245410, ou ſi l'on veut dans le dernier nombre de la combinaiſon générale de 22, qui eſt l'addition de tous les autres.

Le lieu de ce mot *Baal* ſe trouve ainſi : il eſt compoſé de quatre lettres, & partant la premiere à gauche eſt mille,

mille, qui exprime ſon nombre 10648 fois, & cette lettre *B* eſt la deuxiéme lettre, partant il faut multiplier ce nombre par deux, ce ſera 21296; la ſeconde lettre eſt *a*, qui eſt centaine, & qui vaut 484; la troiſiéme eſt encore *a*, qui eſt dixaine, & qui vaut 22; la derniere eſt *l*, qui eſt la dixiéme lettre, partant il faut aſſembler 21296, 484, 22 & 10, & on trouvera que *Baal* ſera le 21812 mot.

Le lieu de *Levi* ſe trouve ainſi; *L* eſt la dixiéme lettre, & partant je multiplie le mille qui eſt 10648 par 10, le produit eſt 106480; *e* eſt la cinquiéme lettre: je multiplie donc 484 par cinq, le produit eſt 2420; *v* eſt la dix-neuviéme lettre que je multiplie par 22, le produit eſt 418; *i* qui eſt la derniere eſt la neuviéme; j'aſſemble donc 106480, 2420, 418 & 9, & je trouve que *Levi* eſt la 109327 diction.

Toutes les autres dictions ſe trouvent de même, ſoit qu'elles ayent plus ou moins de lettres; & il faut remarquer que la premiere choſe qu'il faut faire eſt de voir de combien de lettres la diction eſt compoſée, puis voir la quantiéme lettre eſt la premiere à main gauche, & par le nombre du rang qu'elle tient dans l'alphabet multiplier le nombre de la combinaiſon générale précédent celui des lettres dont eſt compoſée la diction: par exemple, ſi elle avoit huit lettres, & que la premiere lettre fut *G*, qui tient le ſeptiéme lieu dans l'alphabet, il faudroit multiplier le nombre de la combinaiſon de ſept choſes, qui eſt celui qui précéde huit, par ſept, & puis continuer aux autres lettres. Si la diction avoit ſix lettres, & que la premiere fut un *U*, qui tient le dix-neuviéme lieu, il faudroit multiplier la combinaiſon de cinq choſes par dix-neuf, & ainſi des autres: ou bien commencer par la premiere lettre à main droite, qui ne vaut que ſon nombre, & la ſeconde le vaut 22 fois.

Par ce moyen on pourroit écrire des lettres bien obſcu-

res, & qu'il ſeroit bien difficile de déchifrer, ſi l'on n'en ſçavoit la méthode ; ſçavoir ſi on mettoit au lieu des mots le rang qu'ils tiennent dans le grand nombre : mais ce n'eſt pas aſſez de ſçavoir écrire, ſi l'on ne ſçait lire ſon écriture, & ce n'eſt pas peu de choſe que de ſçavoir lire celle-ci ; car ceux mêmes qui l'auroient écrite ne la pourroient lire, s'ils n'en ſçavoient la méthode, quoiqu'ils ſçuſſent celle de l'écrire.

Ayant donc un nombre donné, il faut prendre à la Table des combinaiſons le plus grand nombre qu'on pourra, qui néanmoins puiſſe ſervir de diviſeur au nombre donné. La diviſion faite il faut prendre ce qui eſt reſté, & le diviſer par la combinaiſon qui précéde, & le quotient montre la quantiéme lettre on doit prendre dans l'alphabet, de ſorte qu'il ne faut pas que le quotient paſſe jamais 22, & il faut continuer à diviſer juſques à ce que l'on diviſe par 22, & cette derniere diviſion faite, il faut voir ce qui reſte & mettre la lettre qui convient à ce nombre pour la derniere. Il faut remarquer que ſi l'on ne pouvoit arriver à la diviſion par 22, ou qu'icelle étant faite il ne reſtât rien, ou que l'on ne put pas diviſer par tous les nombres des combinaiſons moindres que le premier qu'on a pris, & que le reſte de la premiere diviſion fut trop petit pour ce faire, le nombre que l'on auroit pris pour diviſeur ſeroit trop grand, & il faudroit prendre celui de devant, qui eſt moindre, & qui n'eſt que $\frac{1}{22}$ du premier, comme en ce nombre 234299, ſi on prenoit 234256 pour diviſeur, le quotient ſeroit 1, & il ne reſteroit plus que 43, que l'on ne pourroit diviſer par les autres nombres; ainſi il faudroit prendre celui de devant, qui eſt 10648, & cela arrive toujours aux dictions qui commencent par un z, & à celles qui commencent par un y ſuivi d'un z. 2°. Il faut remarquer que la diction aura toujours une lettre plus que le nombre des combinaiſons qui ſervira de diviſeur, comme en cet exemple ; où 10648 ſert de diviſeur, qui eſt le

nombre de la combinaiſon de trois choſes, il y aura quatre lettres ; car ayant diviſé 234299 par 10648, le quotient ſera 21 qui vaut *y*, & il reſtera 10691 qu'il faudra diviſer par 484, & le quotient ſera 22, qui eſt un *z*, & il reſtera 43, qu'il faudra diviſer par 22, le quotient eſt 1, qui eſt *a*, & le reſte eſt 21 qui eſt *y*; de ſorte que ledit nombre vaudra autant que *yzay*. 3°. Il eſt à remarquer qu'il faut diviſer par tous les nombres moindres juſques à 22, & qu'il n'en faut paſſer aucun, & partant ſi le reſte étoit moindre que le nombre par lequel on devroit diviſer après, le quotient ſeroit trop grand, partant il le faudroit diminuer de l'unité. Si le quotient étoit 1, & que le reſte fut trop petit, il faudroit changer de diviſeur ; comme en l'exemple ci-deſſous : par exemple, en ce nombre 21600, je prens 10648 pour diviſeur ; le quotient eſt 2, & il reſte 304 qui eſt moindre que 484, partant je prens 1 pour quotient, reſte 10952, que je diviſe par 484, le quotient eſt 22, & il reſte 304 que je diviſe par 22, le quotient eſt 13, & il reſte 18 ; de ſorte que ce nombre ſera *Azot*.

Si on vouloit voir quel rang tient une diction entre celles qui ont même nombre de lettres, comme une de trois lettres entre celles de trois lettres, dont il y en a 10648, il faudroit multiplier la premiere lettre à main gauche, ſçavoir le rang qu'elle tient dans l'alphabet moins un par 484, qui ſont les centaines ; puis la ſeconde lettre auſſi moins un par 22, & puis mettre le lieu de la derniere ſans en rien ôter, comme à ce mot *Aſa* la premiere lettre vaut 1, & partant il la faut paſſer, parce qu'ôtant un d'un, il ne reſte rien ; je viens à *ſ* qui eſt la dix-ſeptiéme lettre dont j'ôte 1, reſte 16 que je multiplie par 22, & au produit j'ajoute 1 à cauſe de la derniere lettre qui eſt *a*, ce ſera 353. Le rang de ce mot *Vaz* ſe trouve ainſi : *V* eſt la dix-neuviéme lettre, partant je multiplie 18 par 484, le produit eſt 8712 ; la ſeconde lettre eſt *a* qui vaut 1, dont

ayant ôté 1 il ne reſte rien ; je viens à *z* qui eſt la derniere lettre, & qui vaut 22 que j'ajoute à 8712, & je trouve que le rang de ce mot eſt le 8734 dans le nombre de 10648, & ainſi des autres qui ont plus de lettres ; & remarquez que l'*a* au commencement ou au milieu d'une diction n'eſt conté pour rien, & qu'étant à la fin il vaut 1.

Ayant un nombre donné dire quelle diction tient ce rang dans le nombre total, pourvû qu'on diſe de combien elle eſt de lettres.

Il faut ajouter au nombre donné le nombre des combinaiſons des dictions compoſées de moins de lettres : par exemple, on me donne 155 contenant le rang d'une diction de trois lettres, j'y ajoute les combinaiſons des dictions d'une & de deux lettres, qui ſont 484 & 22, la ſomme ſe montera à 661, & pour ce nombre j'opére comme ſi je voulois voir quelle diction tient ce rang dans le nombre total de toutes les dictions je le diviſe par 484 le quotient eſt un, reſte 177 que je diviſe par 22, le quotient eſt 8, reſte 1, partant je prens la premiere lettre, puis la huitiéme, puis la premiere, pour avoir *a h a*.

Autrement il faut diviſer le nombre par le même diviſeur que ci-deſſus, & au quotient y ajouter 1, & faire ainſi à tous les quotiens : mais au reſte qui ſe trouve après la diviſion par 22, il ne faut rien ajouter : par exemple, on me donne 587, lequel je diviſe par 484, le quotient eſt 1, auquel j'ajoute 1, ſont 2, reſte 103, que je diviſe par 22 ; le quotient eſt 4, auquel j'ajoute 1, ſont 5, & reſte 15, partant je prens la deuxiéme lettre, la cinquiéme & la quinziéme, & je fais la diction *B e q*.

Si l'on me donnoit le même nombre, & que l'on me dit que ce fut un mot de deux lettres, je dirois qu'il ſeroit impoſſible, car il n'y a que 484 dictions de deux lettres : mais ſi on luſ donnoit quatre lettres, il faudroit diviſer de la même façon, & mettre un *a* devant, s'il avoit cinq lettres il faudroit mettre deux *a*, & ainſi des autres, comme

en ce nombre 155 qui tient lieu d'une diction de trois lettres ; je le devrois diviſer par 484, mais à cauſe qu'il ne ſe peut, je mets un *a* comme ſi c'étoit un zero, ſinon qu'il ſe peut mettre le premier, & qu'étant le dernier il vaut 1 ; puis je prens l'autre diviſeur 22, par lequel je diviſe 155, le quotient eſt 7, & il reſte 1, j'ajoute l'unité à 7, parce que *a* n'a point de valeur s'il n'eſt à la fin, & que *b* vaut 1, *c* 2, *d* 3, &c. ſi ce n'eſt quand ils ſont à la fin, de ſorte que ce mot ſera *Aha* : le premier *a* eſt à cauſe que le premier diviſeur s'eſt trouvé plus grand que le nombre à diviſer ; *h* à cauſe de 7 lequel vaut 8 par l'addition de l'unité, & *h* eſt la huitiéme lettre, & le dernier *a* à cauſe de 1 qui reſte.

Quand une diviſion manque quelque part au commencement, au milieu, ou à la fin, il faut toujours mettre un *a*, comme en ce nombre 500, qui tient lieu d'une diction de trois lettres. Je le diviſe par 484, il vient 1, qui eſt un *b*, & il reſte 16, & partant je ne puis diviſer par 22, de ſorte qu'après le *b* il faut mettre un *a*, & puis la ſeiziéme lettre qui eſt *r*, & le mot ſera *Bar*. Il faut noter ici que l'*a* ne vaut aucun nombre, ſinon à la fin qu'il vaut 1, & toutes les autres auſſi valent leur nombre quand elles ſont les dernieres, mais étant au commencement ou au milieu elles valent 1 moins que le rang où elles ſont dans l'alphabet, comme qui commenceroit à conter par *b*, *c*, *d*, 1, 2, 3, &c. & ainſi *z* ne vaut que 21, mais à la fin il vaut 22.

Il faut encore remarquer que comme en faiſant les opérations d'une diviſion quand le diviſeur eſt plus grand que le nombre qui lui eſt au-deſſus, on met un zero ou deux, & on avance le diviſeur d'une ou de deux places : auſſi dans l'opération de toutes ces diviſions-ci, ſi le diviſeur ſe trouve plus grand que le dividende, il faut mettre un *a*, & mettre le diviſeur d'après, lequel, s'il eſt trop grand, il faut encore mettre un *a*, & changer de divi-

ſeur, juſques à ce qu'il ſe trouve plus petit comme en ce nombre 5157999, qui tient rang d'une diction de ſix lettres, il le faut diviſer par 5153632, qui tient lieu de centaine de mille, le quotient eſt 1 qui eſt *B*, & il reſte 4367, qu'on ne peut diviſer par le diviſeur ſuivant 234256, & partant je mets un *a*; ni par celui d'après auſſi qui eſt 10648, & je mets encore un *a*, puis je le diviſe par 484, le quotient eſt 9 qui eſt *l*, & il reſte 11 que je ne puis diviſer par 22, & partant je mets un *a*, & le reſte eſt 11, qui étant le dernier eſt *m*, ce mot donc ſera *Baalam*; pour faire *Balaam* il faudroit 5249475.

On pourroit écrire par ce moyen des lettres bien obſcures, mais il faudroit mettre devant & après chaque nombre un point, & puis un chiffre, qui marqueroit de combien de lettres la diction ſeroit compoſée, & on pourroit ſe ſervir des deux ſortes tout enſemble. L'on peut écrire des airs par le même moyen, de la même façon que des dictions, en nommant les notes *a*, *b*, *c*, au lieu de *ut*, *re*, *mi*, mais il faudroit écrire les temps à part comme les notes.

Hazars.

C'Eſt la coutume à Genes d'élire, ou plutôt de tirer au ſort tous les ans d'entre les cent Sénateurs cinq perſonnes qui doivent avoir les principales Charges de la République.

Cela a donné lieu à des paris qui ſe font tous les ans touchant ceux à qui le ſort arrivera. Il ſe trouve des Banquiers qui promettront juſques à vingt mille piſtoles pour une qu'on leur donnera ſi le ſort tombe ſur 5 qu'on aura nommez; cinq ou ſix mille, s'il n'y a que 4 des 5 qu'on aura nommez; & 5 ou 6 cens, s'il y en a 3. Pour l'ordinaire ils ne donnent rien pour un ni pour deux. On demande quels ſont les hazars pour le Banquier & pour le Pariant, & quel profit le Banquier peut faire ſur ce commerce.

Il faut premierement arrêter ce que doit donner le Banquier, ſi le ſort tombe ſur ceux qu'on aura nommez, ou ſur quelques-uns d'eux.

Suppoſons que le Banquier donne 20000 piſtoles pour une, ſi le ſort tombe ſur les 5 qu'on aura nommez; 5000 s'il n'y en a que 4; 300 s'il y en a 3; & 4 s'il n'y en a que 2.

On verra premierement en combien de manieres les 5 qu'on doit tirer au ſort peuvent venir.

Il faut multiplier 100 par 99, le produit par 98, par 97 & par 96; mais parce que le produit de ces 5 nombres contient auſſi l'ordre dans lequel ces cinq perſonnes ſont tirées, il le faut diviſer par 120, qui eſt la combinaiſon de cinq choſes; ou bien multiplier ſeulement 80 par 97, 98 & 99, ce qui eſt la même choſe que de multiplier les cinq nombres l'un par l'autre, & diviſer le produit par 120. On aura 75287520, qui ſont toutes les façons dont cinq Billets peuvent être tirez ou pris dans 100.

Il faut maintenant voir quels ſont les hazars du Pariant.

Les cinq qu'il a nommez ne peuvent arriver qu'en une ſeule maniere: il n'y aura donc qu'un hazar pour lui, & 75287519 pour le Banquier; & parce que le Banquier donne 2000 pour 1, il faut multiplier 1 par 20000; donc pour 20000 de hazar qu'a le Pariant, le Banquier en a 75287519, qui étant diviſez par 20000 donnent $3764\frac{3}{4}$, la proportion des hazars eſt donc comme 1 à $3764\frac{3}{4}$.

Pour avoir les hazars de 4, il faut prendre cinq fois 95, qui ſont 475, qu'il faut ôter de tous les hazars, ou plûtôt de ceux qu'a le Banquier ſur les hazars de 5. On ôtera donc 475 de 75287519, il reſtera 75287044 pour les hazars du Banquier: mais parce qu'il donne 5000 pour un, il faut diviſer 75287044 par 5000, & on aura $15057\frac{2}{5}$ peu plus pour les hazars du Banquier, & 475 pour ceux du Pariant; & diviſant l'un par l'autre, il viendra $31\frac{7}{10}$ peu moins, pour les hazars du Banquier, & un pour ceux du Pariant.

Pour avoir les hazars de trois perſonnes dans les cinq qu'on a nommées, on multipliera par 10 le triangle de 94, qui eſt 4465 ; on aura donc 44650 pour les hazars du Pariant, qui étant ôtez des hazars que le Banquier a eu ſur quatre, ſçavoir de 75287044, il reſtera 75242394 pour les hazars du Banquier, qu'il faut diviſer par 300, parce qu'il donne 300 pour 1, & on aura 250808 peu moins pour les hazars du Banquier, qui étant diviſez par 44650, on aura la proportion des hazars du Banquier & du Pariant, comme $5\frac{1}{5}$ peu plus à 1.

Reſte à voir les hazars de 2. Pour avoir ceux du Pariant, on multipliera le tétraedre de 93, ſçavoir 138415 par 10, & on aura 1384150, qu'il faut ôter des hazars que le Banquier a eu ſur 3, ſçavoir de 75242394, il reſtera 73858244, qu'il faut diviſer par 4, à cauſe que le Banquier donne 4 pour 1, & on aura 18464561 pour les hazars du Banquier ; & les diviſant par les hazars du Pariant, qui ſont 1384150, on trouvera que les hazars du Banquier & du Pariant ſont entr'eux comme $13\frac{1}{2}$ peu moins à 1.

On peut auſſi conſiderer les hazars de 1, c'eſt à dire, s'il venoit quelqu'un des cinq qu'on a nommé. Il faudra multiplier par 5 le triangle-triangle ou quatriéme puiſſance triangulaire de 92, qui eſt 3183545, le produit eſt 15917725, qu'il faut ôter des hazars du Banquier ſur 2, ſçavoir de 73858244, il reſtera 57940519, qui ſont les hazars du Banquier: mais parce qu'il ne donne rien, quand il ne vient qu'un des cinq qu'on a nommez, on diviſera 57940519 par 15917725, & le Banquier aura encore $3\frac{15}{25}$ de hazard ſur 1 qu'aura le Pariant ; mais ce hazard n'eſt qu'au profit du Banquier, & le Pariant n'y a rien.

Ayant tous ces hazars, il les faut aſſembler. Et premierement ſi le ſort tombe ſur les cinq qui ont été nommez, le Pariant a 20000. S'il en vient quatre, il y a 475 hazars pour le Pariant, qui étant multipliez par 5008 que le Banquier

quier doit donner, s'il arrive quelqu'un des 475 hazars, ce ſera 2375000 hazars pour le Pariant.

Si le ſort tombe ſur trois de ceux qui ont été nommez, les hazars de trois ſont 44650, qui multipliez par 300, que le Banquier doit donner pour chacun de ces hazars, ce ſera 13395000 hazars pour le Pariant, s'il en vient trois des cinq qu'il a nommé.

Si le ſort ne tombe que ſur deux, on a trouvé que les hazars de deux ſont 1384150, qui multipliez par quatre donnent 5536600 hazars pour le Pariant. Tous ces hazars enſemble montent à 21326600; & ce ſont les hazars du Pariant.

Hazars	
20000	de 5
2375000	de 4
13395000	de 3
5536600	de 2
21326600	Somme des hazars du Pariant.

Pour avoir les hazars du Banquier, il faut aſſembler tous les hazars du Pariant, qui ſont 1, 475, 44650 & 1384150, la ſomme eſt 1429276, qui ôtée de tous les hazars qui ſont en tout 75287520, il reſtera 73858244 pour les hazars du Banquier; les hazars du Pariant ſeront donc à ceux du Banquier comme 21326600 à 73858244, ou dans les moindres termes, comme 183850 à 636709, qui eſt comme 1 à un peu moins de $3\frac{1}{2}$, ou juſtement comme 1 à $3\frac{85459}{183850}$.

Hazars	
1384150	de 2
44650	de 3
475	de 4
1	de 5
1429277	Somme des hazars du Banquier.

Ce ſeroient là les hazars du Banquier & du Pariant, ſi le Banquier ne recevoit rien de ceux à qui le ſort eſt favorable: mais parce qu'outre l'avantage qu'il a dans les hazars, il a encore une piſtole de chacun de ceux à qui les hazars peuvent arriver, il a pour lui tous les hazars de

cinq perſonnes choiſies dans 100, ſçavoir 75287520 : la proportion des hazars du Pariant eſt donc à ceux du Banquier, comme 2132660 à 75287520, ou comme 533165 à 18821188, c'eſt-à-dire comme 1 à un peu plus de $3\frac{1}{2}$.

Mais parce que d'ordinaire on ne donne rien pour 2, il faut ôter les hazars de 2, qui ſe montent à 5536600, des hazars du Pariant, le reſte ſera 15790000, qui ſont aux hazars du Banquier, comme 394750 à 18821188, ou comme 1 à un peu plus de $4\frac{3}{4}$.

Voici le fondement & les raiſons de cette opération.

Premiérement pour ſçavoir en combien de manieres on peut choiſir cinq choſes dans 100, on multiplie l'un par l'autre les cinq nombres 100, 99, 98, 97, & 96, & on diviſe le dernier produit par l'ordre de cinq choſes.

Si on ne prenoit qu'une choſe dans 100, il eſt certain qu'on ne le pourroit faire qu'en 100 façons. Que ſi on en prend deux, puiſque la premiere ſe prend en 100 façons, après chacune des 100 on peut mettre laquelle on voudra des 99 reſtantes ; mais on voit ici que l'ordre y eſt compris, parce que chacune des 100 ſera dans tous les choix la premiere & la derniere ; il faudra donc diviſer par deux, ſçavoir par l'ordre de deux choſes, le produit de 99 par 100.

Si on choiſit trois choſes dans 100, parce que deux choſes ſe prennent en 9900 manieres, qui eſt le produit de 100 par 99, & qu'il en reſte 98, on pourra choiſir chacune de ces 98 qui reſtent, & l'ajoûter à chacune de 9900 façons dont on a choiſi deux choſes : le produit de 9900 par 98 contiendra les diverſes manieres de choiſir trois choſes dans 100, l'ordre compris.

Par la même raiſon pour choiſir quatre choſes, il faudra multiplier ce dernier produit, qui eſt 970200, par 97 qui reſtent ; & pour cinq choſes multiplier encore ce dernier produit, qui eſt 94109400, par 96, & diviſer le

produit 9034502400 par 120, qui eſt l'ordre de cinq choſes, parce que par cette conſtruction chacune des 100 choſes tient alternativement chacun des cinq rangs qui ſont dans cinq choſes, ſçavoir le premier, le deuxiéme, troiſiéme, quatriéme & dernier.

Pour les hazars du Pariant on multiplie 95 par 5, pour ſçavoir en combien de façons il peut venir quatre des cinq qu'il a nommez; car puiſqu'il en manque un, chacun des cinq peut manquer, & en ſa place il peut venir l'un des 95, dont il n'a nommé aucun: il faut donc multiplier 95 par 5. Il eſt vrai que les quatre étant ôtez de 100, il reſteroit 96: on ne multiplie pas pourtant par 96, parce que le cinquiéme des nommez ſe trouvant au nombre des hazars du Pariant, il ſeroit compté deux fois au Pariant.

S'il vient trois des cinq qui ont été nommez, les hazars ſe trouvent en multipliant par 10 le triangle de 94.

On multiplie par 10, parce que trois choſes ſe peuvent choiſir dans cinq en dix manieres, ainſi qu'il a été expliqué ci-devant, quand on a fait voir en combien de façons on peut choiſir cinq choſes dans 100, car on multipliera 5, 4, 3, l'un par l'autre, & on diviſera le produit 60 par l'ordre de 3, qui eſt 6.

On multiplie par le triangle de 94, parce que dans les cinq qu'on tire au hazard, n'y en ayant que trois des cinq que le Pariant a nommez, les deux autres doivent être des 95 autres. Or dans tous les choix ou hazars, le premier de ces 95 ſe trouvera avec chacun des 94 autres. Après le ſecond de ces mêmes 95 ſe trouvera avec chacun des 93 autres. Le troiſiéme avec chacun des 92; & ainſi de ſuite juſqu'au 94 qui ſe trouvera avec le dernier des 95: or ces nombres aſſemblez font le triangle de 94, parce qu'il faudroit ajoûter 94 avec 93, 92, 91, &c. juſqu'à 1.

Par le même raiſonnement on verra pourquoi pour avoir les hazars de deux, on multiplie par 10 le tétraédre de 93.

Queſtion.

On demande à combien de perſonnes ſe montent les ancêtres en trente générations, ſuppoſant que les mariages ne ſe ſoient point faits entre les deſcendans des premieres & plus anciennes générations. Il faut prendre la trentiéme puiſſance de deux, qui eſt 1073741824, & c'eſt le nombre des ancêtres.

Queſtion.

Au jeu des Eſchecs, les huit pions peuvent avancer une ou deux caſes au premier coup. On demande en combien de façons on peut joüer ces huit pions, en ne joüant chacun d'eux qu'une ſeule fois.

S'ils ne pouvoient être joüez que d'une ſeule maniere, on auroit 40320 façons de les joüer, ſçavoir ſelon la combinaiſon de l'ordre de huit choſes : mais parce que chacun ſe peut joüer en deux manieres, il faudra multiplier 40320 par la huitiéme puiſſance de deux, ſçavoir par 256, & on aura 10321920.

En cette ſorte de combinaiſon où chaque choſe ſe place en deux manieres, il faut multiplier tous les nombres pairs l'un par l'autre, au lieu qu'en la combinaiſon ſimple on ne multiplie que tous ces nombres. Ainſi une choſe ſe	1	1	1
	4	8	2
	6	48	3
	8	384	4
	10	3840	5
	12	46080	6
	14	645120	7
	16	10321920	8

prend en deux façons, 2 en 8, 3 en 48, 4 en 384, &c.

Si chaque choſe ſe prenoit en trois manieres, comme ſi les pions pouvoient avancer une, deux ou trois caſes, il faudroit multiplier l'un par l'autre les nombres

multiples de 3, ſçavoir 3,	3	3	1
6, 9, 12, &c. & on auroit	6	18	2
18 pour le changement	9	162	3
de deux choſes, 162 pour	12	1944	4
celui de trois, &c. & ainſi	15	29160	5
les huit pions ſe joüe-	18	524880	6
roient la premiere fois en	21	11022480	7
264539520 manieres.	24	264539520	8

TRAITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

PREMIERE PARTIE.

DEFINITIONS.

I.

LORSQU'UN nombre quarré eſt égal à la ſomme de deux autres nombres quarrez, les trois nombres qui ſont les racines de ces trois quarrez, ſeront appellez un Triangle Rectangle en nombres, ou les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres : ainſi on dira que 3, 4, 5, eſt un Triangle Rectangle en nombres ; parce que 25, quarré de 5, eſt égal à la ſomme de 16, & 9, qui ſont les quarrez des deux autres nombres 3 & 4.

II.

Les deux moindres nombres d'un Triangle Rectangle en nombres, ſeront appellez les côtez ou les moindres

côtez de ce Triangle, la moitié de leur produit ſera appellée l'aire de ce Triangle, & le troiſiéme nombre ſera appellé ſon hypotenuſe, ou ſon plus grand côté.

III.

Triangle Rectangle primitif en nombres, eſt celui entre les trois côtez duquel il n'y a point d'autre commune meſure que l'unité.

IV.

Triangle Rectangle compoſé en nombres, eſt celui dont les trois côtez ſont meſurez par un même nombre.

V.

Un Triangle Rectangle en nombres ſera dit double d'un autre, lorſque ſes trois côtez ſont doubles des trois côtez de l'autre, chacun du ſien, & de même à l'égard des autres multiples.

VI.

On appelle ici nombre pairement pair celui qui eſt meſuré par 4, & nombre impairement pair, celui qui eſt meſuré par 2, & non par 4.

SUPPOSITIONS.

I.

Si deux nombres quarrez étant joints enſemble ne font point un nombre quarré; les racines de ces deux quarrez ne ſeront point les côtez d'un Triangle Rectangle en nombres.

II.

Si les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres ſont multipliez par un même nombre, les trois produits ſeront

ſeront les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres ; & ſi les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres ont une même meſure autre que l'unité, & qu'ils ſoient diviſez par cette commune meſure, les trois quotiens ſeront les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres.

III.

Tout nombre quarré eſt meſuré par tous les nombres qui meſurent ſa racine : il en eſt de même des nombres cubes, quarrez quarrez, & autres puiſſances : & ſi un quarré eſt meſuré par un nombre premier, ſa racine ſera auſſi meſurée par ce nombre premier, ou ſera ce même nombre premier.

IV.

Un nombre quarré étant multiplié par un autre nombre quarré, le produit eſt un nombre quarré : mais s'il eſt multiplié ou diviſé par un nombre non quarré, le produit ni le quotient ne ſeront point des quarrez.

V.

Tout nombre multiplié par un nombre pair, fait un nombre pair ; & tout nombre impair ajoûté à un nombre pair, ou multiplié par un impair, fait un impair ; & la ſomme de deux impairs eſt un nombre pair.

VI.

Si deux nombres ſont entr'eux comme quarré à quarré, leurs moitiez, ou autres pareilles parties, ſeront auſſi entr'elles comme quarré à quarré.

VII.

Si deux nombres ont entr'eux une commune meſure, la ſomme & la difference de ces nombres, & auſſi leurs doubles, auront la même commune meſure.

VIII.

Le quarré de la ſomme de deux nombres eſt égal au quarré de leur difference, & au quadruple du produit des mêmes nombres.

IX.

Si un même nombre multiplie deux nombres & leur difference, ce dernier produit ſera la difference des deux premiers produits.

X.

Trois nombres étant donnez, le nombre ſolide produit par ces nombres ſera toûjours le même, en quelque ordre qu'on les multiplie; le même arrivera s'il y a plus de trois nombres qui ſe multiplient de ſuite.

XI.

Deux nombres plans ſemblables ne peuvent être premiers entr'eux, ni l'un d'eux premier au double de l'autre; d'où il s'enſuit, que le produit de deux nombres premiers entr'eux ne peut être un nombre quarré, s'ils ne ſont eux-mêmes des quarrez, ni double quarré, ſi l'un d'eux n'eſt un quarré, & l'autre un double quarré.

XII.

On ſuppoſe auſſi que ce qu'on fait voir par le calcul de l'algebre, n'a pas beſoin d'autre preuve; & on l'employe dans ce traité, lorſque les propoſitions ſont faciles, ou que leurs démonſtrations ſont trop obſcures.

REMARQUES.

I.

Ces propoſitions ſont ſuppoſées, comme étant démontrées

par les Auteurs, ou parce qu'elles ſont faciles d'elles-mêmes.

II.

L'unité eſt ici employée pour nombre, & même pour nombre quarré ou quarré quarré.

III.

Lorſqu'on parle ici de Triangles, ou de Triangles Rectangles, on entend parler des Triangles Rectangles en nombres entiers.

LEMME,

PROPOSITION I.

Tout nombre au-deſſus de l'unité eſt ternaire, ou ternaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

LE premier nombre au-deſſus de l'unité eſt 2, qui eſt moindre d'une unité que 3, & par conſéquent eſt ternaire — 1, & entre deux ternaires de ſuite comme 3 & 6, ou 6 & 9, &c. il n'y a toûjours que deux nombres, comme entre 3 & 6, il n'y a que 4 & 5, dont le premier excede le premier ternaire d'une unité, & le ſecond eſt moindre d'une unité que le ſecond ternaire, & par conſéquent le premier eſt ternaire + 1, & le ſecond, ternaire — 1. La même choſe arrive néceſſairement dans tous les autres nombres: donc tout nombre au-deſſus de l'unité eſt ternaire, ou ternaire + ou — 1; ce qu'il falloit prouver.

LEMME,

PROPOSITION II.

Tout nombre impair au-deſſus de l'unité eſt quaternaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

LE premier impair au-deſſus de l'unité eſt 3, qui eſt moindre d'une unité que 4, & par conſéquent eſt quaternaire — 1, & entre deux quaternaires de ſuite, comme 4 & 8, ou 8 & 12, &c. il n'y a toûjours que trois nombres, dont celui du milieu eſt pair, & les autres deux ſont impairs, comme entre 4 & 8, il n'y a que 5, 6 & 7, dont 5 & 7 ſont impairs; & il eſt manifeſte que 5 eſt 4 + 1, c'eſt-à-dire quaternaire + 1, & que 7 eſt 8 — 1, c'eſt-à-dire quaternaire — 1, puiſque 8 eſt quaternaire. La même choſe arrive néceſſairement dans tous les autres nombres à l'infini. Donc tout nombre impair au-deſſus de l'unité eſt quaternaire + ou — 1; ce qu'il falloit prouver.

LEMME,

PROPOSITION III.

Tout nombre au-deſſus du nombre 2 eſt quinaire, ou quinaire + ou — 1, ou quinaire + ou — 2.

DEMONSTRATION.

LEs deux premiers nombres entre 2 & 5, ſont 3 & 4; & il eſt évident que 3 eſt 5 — 2, & que 4 eſt 5 — 1; & par conſéquent 3 eſt quinaire — 2, & 4 eſt quinaire — 1: & entre deux quinaires de ſuite, comme 5 & 10, ou 10 & 15, &c. il n'y a toûjours que quatre nombres, comme entre 5 & 10, il n'y a que 6, 7, 8, & 9, dont le premier excede 5 d'une unité, le ſecond de deux unitez; le troiſié-

me eſt moindre de deux unitez que le ſecond quinaire, & le quatriéme ſeulement d'une unité, & par conſéquent le premier de ces quatre nombres eſt quinaire + 1, le ſecond eſt quinaire + 2, le troiſiéme quinaire — 2, & le quatriéme quinaire — 1. La même choſe arrive néceſſairement dans tous les autres nombres à l'infini. Donc tout nombre au-deſſus du nombre 2 eſt quinaire, ou quinaire + ou — 1, ou quinaire + ou — 2; ce qu'il falloit prouver.

LEMME;

PROPOSITION IV.

Le quarré de tout nombre pairement pair eſt octonaire, & le quarré de tout nombre pairement impair, au-deſſus de 2, eſt octonaire + 4.

DEMONSTRATION.

LE premier nombre pairement pair eſt 4, & d'autant que 4 eſt moyen proportionnel entre 2 & 8, ſon quarré 16 ſera égal à 2 fois 8, & par conſéquent ſera meſuré par 8, c'eſt-à-dire ſera octonaire. Or tout autre nombre pairement pair eſt multiple de 4. Soit donc 4 A, lequel on voudra de ces nombres, ſon quarré ſera 16 A^2 qui ſera multiple de 16 par A^2, c'eſt-à-dire de 8 par 2 A^2, & par conſéquent ce quarré ſera meſuré par 8, & ſera octonaire. Donc le quarré de tout nombre pairement pair eſt octonaire. Que ſi un nombre au-deſſus de 2 eſt pairement impair, il ſera 4 A + 2, & ſon quarré ſera 16 A^2 + 8 A + 4, c'eſt-à-dire octonaire + 4, puiſque la ſomme de 16 A^2 & de 8 A eſt octonaire, donc le quarré de tout nombre pairement pair, &c. Ce qu'il falloit prouver. Def. 6.

LEMME,

PROPOSITION V.

Tout nombre quarré au-deſſus de l'unité eſt ternaire, ou ternaire + 1.

DEMONSTRATION.

TOut nombre au-deſſus de l'unité eſt ternaire, ou ternaire + ou — 1. Or ſi la racine du quarré eſt ternaire, ſon quarré le ſera auſſi.

Prop. 1.
Supp. 3.

Si elle eſt ternaire + 1, ſon quarré ſera auſſi ternaire + 1. Car ſoit cette racine 3 A + 1, ſon quarré ſera égal au quarré de 3 A, plus deux fois le produit de 3 A par 1, plus le quarré de l'unité; mais les trois premiers nombres étant ternaires, leur ſomme ſera ternaire; ſi donc on y ajoûte le quatriéme qui eſt l'unité, le tout qui eſt le quarré de 3 A + 1 ſera ternaire + 1.

Supp. 22.

Que ſi la racine eſt ternaire — 1, ſon quarré ſera auſſi ternaire + 1. Car ſoit cette racine 3 A — 1, ſon quarré ſera égal au quarré de l'unité, plus le quarré de 3 A, ſçavoir 9 A^2 moins 6 A, qui eſt deux fois le produit de 3 A par 1; mais 6 A étant ternaire, ſi on l'ôte de 9 A^2 quarré de 3 A, qui eſt ternaire, le reſte ſera ternaire; & par conſéquent étant joint au quarré de l'unité, le tout ſera ternaire + 1. Donc tout nombre quarré au-deſſus de l'unité eſt ternaire ou ternaire + 1; ce qu'il falloit prouver.

LEMME,
PROPOSITION VI.

Si un nombre quarré eſt meſuré par un nombre premier, il le ſera auſſi par ſon quarré : & ſi un nombre eſt meſuré par un nombre premier, & non par ſon quarré, il ne ſera pas nombre quarré.

DEMONSTRATION.

SOit A un nombre premier qui meſure B^2, je dis que A^2 meſurera auſſi B^2; car A meſurera auſſi B ; ſoit C le nombre par lequel il le meſure : donc C A ſera égal à B, & C^2 A^2 quarré de C A, ſera égal à B^2. Donc B^2 ſera meſuré par A^2. Ce qu'il falloit prouver. Que ſi D eſt un nombre meſuré par A nombre premier, & non par A^2, il ne ſera pas quarré : car s'il étoit quarré, il ſeroit auſſi meſuré par A^2 par la premiere partie ; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc ſi un nombre quarré eſt meſuré, &c. Ce qu'il falloit prouver. On prouvera, de même qu'en la premiere partie, qu'un nombre quarré eſt meſuré par les quarrez de tous les nombres qui meſurent ſa racine.

Supp. 3.

Supp. 12.

LEMME,
PROPOSITION VII.

Tout nombre quarré impair au-deſſus de l'unité, eſt octonaire +1.

DEMONSTRATION.

TOut nombre impair au-deſſus de l'unité eſt quaternaire +ou −1 ; or ſi la Racine du quarré impair eſt 4 A +1 ; ſon quarré ſera 16 A^2, plus 8 A, plus l'unité : mais 16 A^2 eſt meſuré par 8, & 8 A eſt auſſi meſuré par 8 ; donc leur ſomme ſera meſurée par 8 ; & y ajoutant le quarré de l'unité, le tout ſera octonaire +1. Que ſi la

Prop. 2.

Supp. 12.

Prop. 4.

Supp. 12. Racine eſt un quartenaire — 1 ; pour avoir ſon quarré il faudra ôter du quarré du premier nom meſuré par 16, le double produit des deux noms qui eſt octonaire ; & il reſtera un octonaire, auquel ajoutant l'unité quarré du 2e nom — 1, on aura encore un octonaire — + 1, pour le quarré d'un quaternaire — 1. Donc tout nombre quarré impair au-deſſus de l'unité eſt octonaire — + 1 ; ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE I.

Il s'enſuit que la ſomme de deux quarrez impairs, eſt toujours un nombre impairement pair, & n'eſt point un nombre quarré. Cela eſt évident ; car ſi on aſſemble un octonaire — + 1, avec un octonaire — + 1, ou avec l'unité priſe pour un nombre quarré, on aura un octonaire — + 2, qui étant meſuré par 2, & non par ſon quarré 4, ſera un nombre impairement pair, & ne ſera point quarré : que ſi on aſſemble deux quarrez de l'unité, qui ſont deux quarrez impairs, leur ſomme ſera 2, qui eſt un nombre impairement pair & non quarré.

Def. 6.

Prop. 6.

CONSEQUENCE II.

Il ſuit de cette propoſition, & de la 5e, que tout quarré impair au-deſſus de l'unité qui n'eſt point meſuré par 3, ſurpaſſe de l'unité un nombre meſuré par 24 ; puiſqu'il ſurpaſſe de l'unité, un multiple de 3, & un multiple de 8, & que le produit de ces deux nombres eſt meſuré par 24.

Prop. 37. du 7. d'Eucl.

LEMME,

LEMME,

PROPOSITION VIII.

Tout quarré au-deſſus de l'unité qui n'eſt point meſuré par 5, eſt quinaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

TOut nombre plus grand que le binaire qui n'eſt point meſuré par 5 eſt quinaire + ou — 1 ou quinaire + ou — 2. S'il eſt quinaire + ou — 1, ſon quarré ſera quinaire + 1, par un raiſonnement ſemblable à celui de la propoſition 5. Prop. 3.

S'il eſt quinaire + ou — 2, ſon quarré ſera quinaire + 4, par le même raiſonnement; ainſi le quarré de 5 A + 2, eſt $25 A^2 + 20 A + 4$, & le quarré de 5 A — 2 eſt $25 A^2 - 20 A + 4$: & il eſt évident que chacun de ces quarrez eſt quinaire + 4, mais un quinaire + 4 eſt quinaire — 1, & parce que 4 quarré du binaire, eſt auſſi quinaire — 1; il s'enſuit que tout quarré au-deſſus de l'unité qui n'eſt point meſuré par 5, eſt quinaire + ou — 1. Ce qu'il falloit prouver. Supp. 12.

CONSEQUENCE.

De cette propoſition il s'enſuit, que tout quarré qui n'eſt point meſuré par 5, a pour ſon dernier chiffre ou caractere à main droite, l'un des quatre nombres 1, 4, 6, 9; & que les nombres qui ont pour leur dernier chiffre 2, 3, 7 ou 8 ne ſont point quarrez: la raiſon en eſt évidente, puiſque le chiffre final de tout nombre meſuré par 5, étant 5 ou 0, les nombres qui ont pour dernier chiffre 1, 4, 6, ou 9, ſont differens par l'unité d'un nombre meſuré par 5, ce qui eſt néceſſaire pour faire qu'ils ſoient quarrez: & que les nombres qui ont pour dernier chiffre l'un des quatre autres nombres, en ſont differens par 2, & par conſéquent ne ſont point quarrez par cette Prop. 8.

LEMME,

PROPOSITION IX.

Tout quarré quarré au-deſſus de l'unité, qui n'eſt point meſuré par 5, eſt quinaire +1.

DEMONSTRATION.

PUiſque le quarré quarré n'eſt pas meſuré par 5, ſa racine quarrée ne le ſera pas auſſi; & parce que cette racine eſt un quarré, elle ſera quinaire + ou −1, & ſon quarré, qui eſt un quarré quarré, ſera quinaire +1 par un raiſonnement ſemblable à celui de la 5e Propoſition.

Supp. 3. Prop. 8.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit, que le dernier chiffre de tout quarré quarré, qui n'eſt point meſuré par 5, eſt 1 ou 6: la raiſon eſt, que tout nombre meſuré par 5, a pour ſon dernier chiffre 5 ou 0, à quoi ajoutant l'unité, on aura 1, ou 6, pour le dernier chiffre du quarré quarré, puiſqu'il doit être quinaire +1.

PROPOSITION X.

Si on prend deux Nombres inégaux quelconques, le double de leur produit, & la difference de leurs quarrez, ſeront les deux côtez d'un Triangle rectangle, & la ſomme des mêmes quarrez en ſera l'hypotenuſe.

E. F. G.
C. H. D.
A. B.

DEMONSTRATION.

SOient A & B deux nombres donnez, dont A ſoit le plus grand, C le quarré de A; & D le quarré de B; E la ſomme de ces deux quarrez; G leur difference; F le

double produit de A par B : je dis que les trois nombres E, F, G, ſont les trois côtez d'un Triangle rectangle : car ſoit H, le produit de A par B, d'autant que F eſt double de H, ſon quarré ſera quadruple du quarré de H, mais H étant moyen proportionnel entre C & D, ſon quarré ſera égal au produit de C par D, donc le quarré de F, ſera quadruple du produit de C par D : mais 4 fois le produit de C par D, avec le quarré de G leur difference, eſt égale au quarré de leur ſomme E. Donc le quarré de F, avec le quarré de G, ſera égal au quarré de E ; & par conſéquent les trois nombres E, F, G, ſeront les trois côtez d'un Triangle rectangle, & E en ſera l'hypotenuſe. Ce qu'il falloit prouver. Supp. 8. Def. 11. Def. 21.

Démonſtration Algébrique.

$A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$ 2 A B, ſont les trois nombres E, G, F, le quarré de $A^2 + B^2$ eſt $A^4 + B^4 + 2 A^2 B^2$ le quarré de $A^2 - B^2$ eſt $A^4 B^4 - 2 A^2 B^2$, qui étant joint au quarré de 2 A B, ſçavoir 4 $A^2 B^2$, fait auſſi $A^4 + B^4 + 2 A^2 B^2$. On appellera ces nombres A & B, les générateurs du Triangle rectangle, qui ſera dit être formé ou engendré par ces nombres ; & le double de leur produit, ſera appellé le côté pair du Triangle, parce qu'il eſt toujours un nombre pair. Supp. 12. Definit. 1. Definit. 1.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que ſi un nombre eſt compoſé de deux quarrez, la difference du quarré de ce nombre compoſé, & du quarré de la difference des mêmes quarrez, ſera le quarré du double produit de leurs racines ; puiſque ces racines ſeront les nombres générateurs d'un Triangle, qui aura pour ſon hypotenuſe, la ſomme de leurs quarrez.

Exemple.

13 eſt compoſé des 2 quarrez 9 & 4, dont les racines

ſont 2 & 3 : la difference de 169 quarré de 13, & de 25 quarré de 5 (difference de 9 & 4) eſt 144, qui eſt le quarré de 12, double produit de 3 par 2.

PROBLEME,
PROPOSITION XI.

Trouver 3 nombres quarrez en progreſſion Arithmetique.

SOient A & B les deux côtez d'un Triangle rectangle trouvé par le moyen de deux nombres, comme il a été enſeigné en la Propoſition précédente ; & que C ſoit l'hypotenuſe de ce Triangle : je dis que ſi on prend les trois nombres A — B, A + B & C ; leurs trois quarrez ſeront en progreſſion Arithmetique. Car le quarré de A — B, ſera
Supp. 12. $A^2 + B^2 - 2AB$, le quarré de C ſera $A^2 + B^2$, puiſque ſon quarré eſt égal à la ſomme des quarrez de A & B, & le quarré de A + B, ſera $A^2 + B^2 + 2AB$: & il eſt évident que ces trois quarrez ont pour difference 2 A B, double produit de A, par B : ainſi le Triangle rectangle 5, 12, 13, étant donné, la difference de 5, & de 12, eſt 7, & leur ſomme 17, dont les quarrez ſont 49, & 289, & le quarré de l'hypotenuſe 13, eſt 169 : Or les trois quarrez 49, 169, 289, ont pour difference commune 120, double produit de 5 par 12 : & par conſéquent ces trois quarrez ſont en progreſſion arithmetique.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que la difference du quarré de l'hypotenuſe, au quarré de la ſomme des deux côtez, ou au quarré de leur difference, eſt quadruple de l'aire du triangle ; car les
Def. 2. côtez du triangle étant A & B, l'aire ſera $\frac{1}{2}$ A B ; & la difference du quarré de l'hypotenuſe, au quarré, ſoit de la ſomme, ſoit de la difference des deux côtez eſt 2 A B, qui eſt quadruple de $\frac{1}{2}$ A B.

PROPOSITION XII.

Si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle ſont multipliez par un même nombre, les deux produits ſeront les générateurs d'un autre Triangle rectangle, qui ſera multiple du premier, par le quarré du multipliant.

DEMONSTRATION.

SOient A & B les générateurs d'un triangle rectangle, dont A ſoit le plus grand, & ſoient multipliez par quelconque nombre C; les produits ſeront C A, & C B: Or les trois côtez du triangle qu'ils formeront, ſeront Prop. 10.
$C^2A^2+C^2B^2$, $C^2A^2-C^2B^2$, & $2ABC^2$, qui ſont multiples par C^2, des 3 côtez du premier Triangle A^2+B, A^2-B^2, & 2 A B.

Exemple.

Soient 2 & 3 les générateurs du triangle 5, 12, 13, & ſoient multipliez 2, & 3, par 5: les produits ſeront 10, & 15, qui ſeront les générateurs du triangle 325, 125, Prop. 10.
& 300, dont les côtez ſont multiples de 13, 5, 12, par Def. 5.
25 quarré du multipliant. Donc ce dernier triangle ſera multiple du premier par ce quarré.

PROPOSITION XIII.

Si en un Triangle rectangle, deux des trois côtez n'ont point de commune meſure autre que l'unité, le troiſiéme côté n'en aura point auſſi avec aucun des deux autres; & le Triangle ſera primitif. Et ſi deux des trois côtez ont une commune meſure autre que l'unité, tous les trois auront la même meſure, & le Triangle ſera compoſé.

DEMONSTRATION.

LA premiere partie de cette Propoſition ſe démontre ainſi. Si le troiſiéme côté avoit une commune meſure
Supp. 5. avec quelqu'un des autres côtez, leurs quarrez l'auroient
Supp. 7. auſſi, & pareillement la ſomme & la difference des mêmes
Def. 1. quarrez. Or la ſomme ou la difference de ces quarrez, eſt le quarré de l'autre côté : donc ce 3e quarré auroit la même meſure ; & par conſéquent les quarrez des deux côtez qu'on a ſuppoſé premiers entr'eux, auroient une commune meſure, & ſeroient compoſez entr'eux ; mais lorſque deux quarrez ſont compoſez entr'eux, leurs côtez
Eucl. 29. 7. ſont auſſi compoſez entr'eux ; car s'ils étoient premiers entr'eux, leurs quarrez le ſeroient auſſi : d'où il s'enſuit que les deux côtez qu'on a ſuppoſé premiers entr'eux, ſeroient compoſez entr'eux, ce qui eſt abſurde.

Pour la 2e partie, ſi le 3e côté n'avoit pas une commune meſure avec l'un des deux autres ; ces deux autres n'en auroient point auſſi entr'eux, par ce qui a été dit en la premiere partie : ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc ſi en un Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit, que ſi l'un des trois côtez eſt un nombre premier, le Triangle ſera primitif, puiſque ce côté ne peut avoir de commune meſure avec les deux autres.

Que ſi l'on dit que le moindre côté étant premier, il peut être la commune meſure des deux autres, on prouvera qu'il eſt impoſſible : car l'hypotenuſe ſeroit differente de l'autre côté par ce même nombre premier, ou par un multiple de ce premier : & en tous les deux cas, ſon quarré
Supp. 1. ſeroit plus grand que la ſomme des quarrez des deux autres cotez, ce qui eſt abſurde.

PROPOSITION XIV.

Si on prend deux nombres quelconques premiers entr'eux, dont l'un ſoit pair, & l'autre impair; le Triangle dont ils ſeront les générateurs, ſera primitif.

DEMONSTRATION.

SOient A & B premiers entr'eux, dont l'un ſoit pair, & l'autre impair; je dis que le triangle rectangle qu'ils formeront, ſçavoir A^2+B^2, A^2-B^2 & 2 A B, ſera primitif: car A & B étant premiers entr'eux, leurs quarrez A^2 & B^2 ſeront auſſi premiers entr'eux; & leur ſomme A^2+B^2, ſera auſſi nombre premier à chacun d'eux, & par conſéquent à leurs racines A ou B, & à leur produit A B: Mais A^2+B^2 étant la ſomme d'un pair & d'un impair, ſera un impair; donc il ſera premier au nombre 2, & étant premier à A B, il ſera premier à 2 A B côté pair du Triangle, donc il ſera auſſi premier à l'autre côté A^2-B^2, & les trois côtez n'auront point de commune meſure entr'eux, & par conſéquent le Triangle ſera primitif: Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 10.
Eucl. L. 7.
Supp. 5.
Eucl. l. 7.
Prop. 13.
Def. 5.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que tout nombre compoſé de deux quarrez premiers entr'eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair, eſt l'hypotenuſe d'un Triangle primitif, qui aura pour ſon côté pair le double produit des 2 racines de ces quarrez, & pour ſon côté impair la difference de ces deux quarrez: car les racines de ces deux quarrez, ſeront deux nombres premiers entr'eux, dont l'un ſera pair, & l'autre impair; & par conſéquent le Triangle qu'ils formeront, ſera primitif, par cette 14e Propoſition.

PROPOSITION XV.

Tout Triangle rectangle eſt primitif ou multiple d'un primitif.

DEMONSTRATION.

Def. 3. OU les trois côtez du triangle ſont premiers entre eux, & en ce cas, il ſera primitif; ou ils ſeront compoſez entr'eux: ſoient diviſez ces derniers par leur plus grande Supp. 2. commune meſure: les trois quotiens ſeront les trois côtez Euc. l. 7. d'un Triangle rectangle; & parce qu'ils ſeront premiers entr'eux, le Triangle ſera primitif; & par conſéquent l'autre Triangle ſera multiple de ce primitif par cette plus grande commune meſure. Donc tout triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

LEMME,

PROPOSITION XVI.

La moitié de la ſomme de deux nombres, étant jointe à la moitié de leur difference, fait un nombre égal au plus grand des deux nombres: & la moitié de leur difference étant ôtée de la moitié de leur ſomme, le reſte ſera le moindre des deux nombres.

DEMONSTRATION Algebrique.

Supp. 12. A & B ſont les deux nombres, $A+B$ eſt leur ſomme, & $A-B$ leur difference; $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ joint à $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$, fait le plus grand nombre A; & $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$ étant ôté de $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$, fait le plus petit, ſçavoir B.

CONSEQUENCE.

De là il s'enſuit que $A+B$ joint à $A-B$, fait 2 A, & que $A-B$ étant ôté de $A+B$, le reſte eſt 2 B.

LEM-ME,

LEMME,

PROPOSITION XVII.

Les quarrez de la ſomme & de la difference de deux nombres étant joints enſemble, font une ſomme égale au double de la ſomme des quarrez des mêmes nombres.

DEMONSTRATION Algebrique.

SOit A le plus grand nombre & B le plus petit; leur ſomme ſera A + B, & leur difference A — B; le quarré de A + B, ſera $A^2 + B^2 + 2AB$; le quarré de A — B ſera $A^2 + B^2 - 2AB$: la ſomme de ces deux quarrez eſt $2A^2 + B^2$, qui eſt double de $A^2 + B^2$. Ce qui étoit à prouver. Supp. 12.

LEMME,

PROPOSITION XVIII.

La difference de deux quarrez eſt le produit de la ſomme de leurs racines, par la difference des mêmes racines.

DEMONSTRATION Algebrique.

A & B ſont les racines, $A^2 - B^2$ eſt la difference de leurs quarrez, A — B eſt la difference des racines qui multipliant leur ſomme A + B fait $A^2 + AB - AB - B^2$, & par réduction $A^2 - B^2$, nombre égal à la difference des quarrez des racines A & B. Ce qu'il falloit prouver. Supp. 13.

CONSEQUENCE I.

Il s'enſuit que la moindre difference de deux quarrez eſt 3, puiſque c'eſt le produit de la ſomme des deux moindres nombres 1 & 2, par leur difference 1, qui eſt le moindre de tous les nombres.

CONSEQUENCE II.

Il s'enſuit que ſi les nombres générateurs d'un Triangle rectangle, ont l'unité pour difference, leur ſomme ſera le côté impair de ce Triangle.

PROPOSITION XIX.

En tout Triangle rectangle primitif, l'un des deux côtez eſt pair, & l'autre impair, & l'hypotenuſe eſt auſſi un nombre impair.

DEMONSTRATION.

SI l'un des côtez n'eſt pas pair, & l'autre impair, ils ſeront tous deux pairs, ou tous deux impairs. Ils ne peuvent être tous deux pairs : car ils auroient 2 pour commune meſure, & le Triangle ne ſeroit pas primitif contre l'hypotheſe. Ils ne peuvent être tous deux impairs, parce que chacun de leurs quarrez, ſeroit un quarré impair, & par conſéquent octonaire + 1, donc la ſomme de ces quarrez qui doit être le quarré de l'hypotenuſe ſeroit octonaire + 2, & ne ſeroit pas un nombre quarré : ce qui eſt abſurde. Il reſte donc que l'un des côtez ſoit pair, & l'autre impair : Or le quarré de l'un de ces côtez ſera pair, & celui de l'autre impair, & par conſéquent leur ſomme qui eſt le quarré de l'hypotenuſe, ſera un quarré impair : d'où il ſuit que l'hypotenuſe ſera un nombre impair. Ce qui étoit à prouver.

Prop. 7.

2. Conſ. Prop. 7.

Supp. 2.

Supp. 5.

LEMME,

PROPOSITION XX.

L'hypotenuſe de tout triangle primitif eſt la ſomme de deux quarrez inégaux, & premiers entr'eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair : & le côté impair du même triangle eſt la difference des mêmes quarrez.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

PUiſque l'hypotenuſe d'un Triangle primitif eſt un nombre impair, & qu'un des deux côtez eſt auſſi impair, la ſomme de l'hypotenuſe & du côté impair, & leur difference ſeront des nombres pairs : mais parce que la difference des quarrez de l'hypotenuſe & du côté impair, eſt un quarré, ſçavoir le quarré du côté pair, & que ce quarré eſt le produit de la ſomme & de la difference des deux autres côtez qui ſont impairs : cette ſomme & cette difference, qui ſeront des nombres pairs, ſeront entr'elles comme quarré à quarré : & leurs moitiez qui ſeront des nombres entiers, ſeront auſſi entr'elles comme quarré à quarré : mais la ſomme de ces moitiez eſt l'hypotenuſe de ce Triangle, & la difference en eſt le même côté impair: Or ſi ces deux nombres (c'eſt-à-dire ces deux moitiez) avoient une commune meſure, elle meſureroit auſſi leur ſomme & leur difference, ſçavoir l'hypotenuſe, & le côté impair de ce Triangle. Donc ces nombres ſeroient compoſez entr'eux, & le Triangle ne ſeroit pas primitif, contre l'hypotheſe. Donc ces deux nombres ſont premiers entre eux, & parce qu'ils ſont entr'eux comme quarré à quarré, ce ſeront deux quarrez premiers entr'eux : & puiſque leur ſomme qui eſt l'hypotenuſe eſt un impair, l'un ſera pair, & l'autre impair. Il a été auſſi prouvé, que leur difference étoit le côté impair de ce Triangle : donc l'hypotenuſe de tout Triangle primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 10. Supp. 5. Def. 1. & Supp. 1. Prop. 18. Supp. 5. Supp. 6. Prop. 16. Supp. 7. Def. 5. Supp. 11. Prop. 19.

CONSEQUENCE I.

Il ſuit de cette propoſition, que tout Triangle primitif a deux nombres générateurs premiers entr'eux, dont l'un eſt pair & l'autre impair : car d'autant que l'hypotenuſe de quelconque Triangle primitif, eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair : leurs racines ſeront auſſi des nombres premiers en-

Prop. 14. tr'eux, dont l'un ſera pair, & l'autre impair. Donc ces nombres ſeront les générateurs d'un Triangle primitif, qui ſera le même que celui qui a pour hypotenuſe, la ſomme de leurs quarrez.

CONSEQUENCE II.

Il s'enſuit auſſi que l'hypotenuſe d'un Triangle primitif ſurpaſſe de l'unité un quaternaire. Car puiſqu'elle eſt la Prop. 20. ſomme d'un quarré pair, & d'un impair, & que le quarré Prop. 6. pair eſt 4, ou multiple de 4, & l'impair eſt l'unité, ou eſt Prop. 7. octonaire → 1, cette ſomme ſurpaſſera de l'unité un quaternaire.

CONSEQUENCE III.

Il s'enſuit auſſi qu'il n'y a aucun Triangle rectangle primitif dont le côté impair ſoit moindre que 3, le côté pair moindre que 4, & l'hypotenuſe moindre que 5, puiſque 4, & 1 ſont les moindres nombres quarrez : & leurs racines les deux moindres nombres.

PROPOSITION XXI.

Si on prend deux nombres quelconques impairs & premiers entr'eux, le Triangle dont ils ſeront les générateurs, ſera double d'un primitif, & ces deux nombres ſeront la ſomme & la difference des deux nombres générateurs de ce primitif : & le côté qui eſt la difference des quarrez de ces deux nombres impairs & premiers entr'eux, ſera double du côté pair du primitif, & leur double produit ſera double de ſon côté impair.

DEMONSTRATION.

A . . . . . E . . . . . D . . . . . B C

SOient A B & B C, deux nombres impairs & premiers entr'eux, dont A B ſoit le plus grand, & ſoit A D, la Suppl. 1. difference de A B, B C : il eſt évident que A D ſera un

nombre pair, ſoit icelui diviſé en deux également, & ſoient A E, E D, les moitiez de ce nombre.

D'autant que B D eſt égal à B C, & D E, à E A; le nombre B E ſera la moitié du nombre A C; le nombre A B ſera la ſomme des deux nombres B E, & E A (ou E D:) & le nombre D B (ou B C) en ſera la difference: cela étant, je dis que A E, E B ſont premiers entr'eux: car A B & B C étant premiers entr'eux par l'hypotheſe, leur ſomme A C ſera nombre premier à A B & à B C (ou B D,) & E B moitié de A C, ſera auſſi premier à A B, & B D, donc il ſera premier à D E, c'eſt-à-dire A E difference de E B, D B, donc A E, E B, ſont premiers entr'eux. Il eſt encore évident que l'un de ces nombres eſt pair, & l'autre impair: car ils compoſent enſemble A B, qui eſt impair, & étant premiers entr'eux, ils ſeront les générateurs d'un triangle primitif; je dis maintenant que le triangle formé par les deux nombres A B, B C, a ſes trois côtez doubles des trois côtez du triangle formé par les deux nombres A E, E B, ſçavoir l'hypotenuſe de l'hypotenuſe, le côté pair de l'impair du primitif, & l'autre côté de ſon côté pair. Car A B & B C étant la ſomme & la difference des deux nombres A E, E B, la ſomme des quarrez de A B, & de B C, ſera double de la ſomme des quarrez de A E, & E B, & ces deux ſommes ſont les hypotenuſes des deux triangles. Il eſt encore évident, que la difference des quarrez des nombres A B & B C, eſt un nombre égal au produit de leur ſomme A C par leur difference A D; mais A D étant double de A E, & A C de E B, le produit de A C par A D ſera quadruple du produit de A E par E B, c'eſt-à-dire double du double produit de A E par E B qui eſt le côté pair du triangle primitif: & par conſéquent le côté qui eſt la difference des quarrez de A B, B C, ſera double du côté pair du triangle formé par A E, E B: il eſt encore manifeſte que le côté impair de ce triangle primitif, eſt la difference des quarrez de B E, & A E; & par conſéquent eſt égal au pro-

Eucl. 7.

Prop. 14.

Prop. 17.

Prop. 18.

Prop. 19.

duit de A B par D B, (ou B C.) Donc le double produit de A B par B C, qui eſt le coté pair du triangle formé par A B, B C, étant double du ſimple produit de A B par B C, ſera double du côté impair du triangle primitif. Donc ſi on prend deux nombres quelconques, &c. Ce qu'il falloit prouver.

La converſe de cette propoſition eſt aiſée à prouver, ſçavoir que ſi un Triangle Rectangle eſt double d'un primitif, c'eſt-à-dire multiple d'un primitif par 2, la ſomme & la difference des générateurs du primitif ſeront les générateurs de ce triangle double, & ſeront impairs & premiers entr'eux, car A E, E B, étant les générateurs du Supp. 5. primitif, A B, B C, ſeront leur ſomme & leur difference; or ces derniers nombres ſont impairs: ils ſont auſſi premiers entr'eux; car ſi A B avoit une commune meſure avec B C, ou B D, elle meſureroit auſſi le reſte A D, ce qui eſt abſurde; puiſque A B premier à A E étant impair, il ſera auſſi premier au nombre 2, & par conſéquent il ſera auſſi Eucl. 7. premier à leur produit A D, égal à deux fois A E, & ſuivant ce qui a été prouvé cy-deſſus, ces deux nombres A B, B C ſeront les générateurs de ce triangle double du primitif; d'où il ſuit auſſi que tout triangle double d'un primitif a ſon hypotenuſe compoſée de deux quarrez, & a deux nombres générateurs.

Demonſtration Algebrique.

Soient A & B les nombres A E & E B; $A+B$ ſera A B, & $A-B$ ſera B C; or les trois côtez du triangle primitif ſeront A^2+B^2, A^2-B^2, & 2 A B, & l'hypotenuſe de l'au-Supp. 12. tre triangle ſera la ſomme des deux quarrez A^2+B^2+2 A B, & A^2+B^2-2 A B; laquelle ſomme étant deux fois A^2+B^2, elle ſera double de l'autre hypotenuſe. A^2+B^2, la difference des deux quarrez de $A+B$ & de $A-B$ eſt 4 A B double du côté pair de l'autre triangle; car le moindre quarré A^2+B^2-2 A B étant ôté de A^2+B^2+2 A B,

il reſte 4 A B ; & enfin le double produit de A + B par A — B ſera 2 A^2 — 2 B^2, double du côté impair du triangle primitif, ſçavoir A^2 — B^2.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que l'hypotenuſe d'un triangle double d'un primitif eſt un nombre pair compoſé de deux quarrez impairs, & premiers entr'eux.

PROPOSITION XXII.

Aux Triangles multiples d'un primitif par un quarré, l'hypotenuſe eſt la ſomme de deux quarrez, & le côté qui eſt la difference de ces quarrez, eſt multiple du côté impair du primitif, par le même quarré multiplicateur de ſes trois côtez.

DEMONSTRATION.

PUiſque l'hypotenuſe de tout triangle primitif eſt la ſomme de deux quarrez, chacun de ces quarrez étant multiplié par un quarré, l'un & l'autre produit ſera un quarré, & leur ſomme qui eſt l'hypotenuſe du triangle multiple, ſera la ſomme de deux quarrez. Mais le côté impair du primitif qui eſt la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe du primitif étant multipliée par le même quarré, le produit ſera la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe multiple. Donc aux triangles multiples, &c. ce qu'il falloit prouver. Prop. 20. Supp. 4. Supp. 9.

Demonſtration Algebrique.

Soit $A^2 + B^2$ l'hypotenuſe d'un primitif, ſon côté impair ſera $A^2 - B^2$, ſi on multiplie ces nombres par C^2, l'hypotenuſe du triangle multiple ſera $A^2 C^2 + B^2 C^2$, & la difference de ces deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe ſera $A^2 C^2 - B^2 C^2$, produit de $A^2 - B^2$ par C^2, & par conſéquent multiple du côté impair du primitif par C.

PROPOSITION XXIII.

Aux Triangles multiples d'un primitif par un double quarré, l'hypotenuſe eſt compoſée de deux quarrez, & la difference de ces deux quarrez, qui eſt un des côtez de ce Triangle, eſt multiple par le même double quarré du côté pair du primitif: comme auſſi l'autre côté de ce multiple, eſt multiple du côté impair du primitif par le même double quarré.

DEMONSTRATION.

IL a été démontré en la 21. Propoſition que le nombre 2, qui eſt un double quarré, multipliant les trois côtez d'un primitif, l'hypotenuſe de ce multiple ſera compoſée de deux quarrez, & que leur difference qui eſt un des côtez de ce multiple, ſera double du côté pair du primitif. Je dis encore que tout autre double quarré multipliant un primitif, le triangle multiple qui en ſera formé, aura ſon hypotenuſe compoſée de deux quarrez, & que l'un des côtez en ſera la difference, & ſera multiple du côté pair du primitif par le même double quarré. Car puiſque
Prop. 21. l'hypotenuſe du primitif étant multipliée par 2, fait un nombre compoſé de deux quarrez; ſi la ſomme de ces deux quarrez eſt encore multipliée par un quarré, le produit
Supp. 4. ſera encore la ſomme de deux quarrez: Or c'eſt la même
Supp. 10. choſe de multiplier un nombre par 2, & le produit par un quarré, que de multiplier ce nombre par un double quarré, & par conſéquent les deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe du primitif étant multipliez par un double quarré, feront une ſomme compoſée de deux quarrez qui ſera
Prop. 21. l'hypotenuſe du multiple, & puiſque le nombre 2 ayant multiplié le côté pair du primitif produit la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe du triangle double du primitif, ſi cette difference eſt multipliée par le même quarré qui a multiplié l'hypotenuſe double de celle du primitif; le produit ſera la difference des deux quarrez

quarrez qui compoſent l'hypotenuſe du triangle multiple de ce primitif par le même double quarré : il eſt encore évident que ſi 2 multipliant le côté impair du primitif produit le côté pair du triangle double du primitif, le multiple de ce côté pair par un quarré, ſera multiple de l'impair du primitif par un double quarré, & ſera auſſi le côté pair de ce triangle multiple. Donc aux triangles multiples d'un primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver. Pour faciliter l'intelligence de ces Propoſitions, on donne les exemples ſuivans en nombres. Supp. 9e

Exemples des Propoſitions 14, 21, 22, & 23.

2 & 5 ſont deux nombres premiers entr'eux dont l'un eſt pair, générateurs du triangle 29, 21, 20; le double de ce triangle eſt 58, 42, 40; donc les générateurs ſont 7 & 3 ſomme & difference de 5 & 2 : 58 eſt compoſé des deux quarrez 49 & 9, 42 double de 21 (qui eſt la difference des quarrez qui compoſent 29 hypotenuſe du primitif) eſt le double produit de 7 & 3; & 40, double de 20 côté pair du primitif, eſt la difference des deux quarrez 49 & 9; mais ſi on multiplie 58, 42, & 40, par le quarré 9, on aura 522, 378, 360, pour les trois côtez d'un triangle multiple, & ces côtez ſeront les mêmes que ſi on avoit multiplié 29, 21, & 20, par le double quarré 18; & ce nombre 522 eſt la ſomme des produits de 49 & 9 par 9, dont la ſomme eſt 441 + 81, c'eſt-à-dire 522; & la difference de ces deux quarrez eſt 360, multiple de 20, côté pair du primitif par le double quarré 18. Que ſi on avoit multiplié ces trois nombres, 29, 21, & 20, par un quarré comme 9, les produits ſeroient 261, 189, 180, qui ſeroient les côtez d'un triangle multiple du primitif 29, 21, 20, par un quarré. Or l'hypotenuſe 261, eſt compoſée du produit de 25 par 9, & de celui de 4 par 9, qui ſont des quarrez, dont la ſomme eſt 225 + 36, & leur difference 189 eſt multiple par le quarré 9 de 21 côté impair du triangle primitif, conformément à la Propoſition 22. Prop. 10.

CONSEQUENCE.

Il ſuit des deux Propoſitions précedentes, que les triangles multiples d'un primitif par un quarré ou par un double quarré ont des nombres générateurs ; car puiſqu'un de leurs côtez eſt la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, il s'enſuit que le quarré de ce côté & le quarré de l'hypotenuſe auront pour difference le quarré du double produit des deux nombres, dont les quarrez compoſent l'hypotenuſe, & par conſéquent que ce double produit ſera l'autre côté de ce triangle multiple, & que ces deux nombres ſeront les générateurs de ce triangle multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré.

Conſ. Prop. 10. Prop. 10.

PROPOSITION XXIV.

Tout Triangle qui a des nombres generateurs eſt primitif, ou multiple d'un primitif par un quarré ou par un double quarré.

DEMONSTRATION.

LEs générateurs ſont compoſez entr'eux ou premiers entr'eux ; ſi les générateurs ſont premiers entr'eux, ou l'un d'eux ſera pair, & l'autre impair ; ou ils ſeront tous deux impairs. Au premier cas, le triangle ſera primitif, & au ſecond cas, il ſera double d'un primitif, c'eſt-à-dire multiple d'un primitif par 2, qui eſt un double quarré : mais ſi les générateurs ſont des nombres compoſez entr'eux, ils ne ſeront pas les plus petits de leur raiſon, & ils ſeront également meſurez par deux nombres premiers entr'eux, & en la même raiſon, chacun du ſien : c'eſt-à-dire qu'un même nombre multipliant ces deux nombres premiers entr'eux, il produira ces deux compoſez entr'eux : ſoient donc ces deux nombres compoſez entr'eux A C, & B C, & A & B ſoient les nombres premiers entr'eux, dont

Prop. 14. Prop. 21. Eucl. 7.

l'un ſoit pair, & l'autre impair, qui étant multipliez par C, ont produit A C & B C : le triangle formé par A C & B C, ſera multiple par le quarré de C, du primitif formé par A & B. Que ſi A & B ſont impairs, & premiers entr'eux, A C, & B C en ſeront auſſi également multiples chacun du ſien, & le triangle qui en ſera formé ſera multiple par C^2, du triangle formé par les deux impairs premiers entr'eux. Et d'autant que ce dernier triangle eſt double d'un primitif, l'autre ſera multiple par un quarré du double d'un primitif, ou ce qui eſt la même choſe, il ſera multiple d'un primitif par un double quarré. Donc tout triangle qui a des nombres générateurs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 12. Prop. 18. Prop. 18.

PROPOSITION XXV.

Si un triangle eſt multiple d'un primitif par un nombre non quarré ni double quarré : il n'aura point de nombres générateurs, & ſon côté multiple de l'impair du primitif ne ſera pas la difference de deux quarrez : mais ſon hypotenuſe ſera compoſée de deux nombres, qui ſeront entr'eux comme quarré à quarré, dont la difference ſera le côté multiple de l'impair du primitif.

DEMONSTRATION.

SI ce triangle avoit des nombres générateurs, il ſeroit primitif ou multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Pour la ſeconde partie ſoit $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, 2 A B un triangle primitif, & ſoit quelconque nombre C, non quarré ni double quarré, par lequel le primitif ſoit multiplié. L'hypotenuſe de ce multiple ſera $C A^2 + C B^2$, qui ſeront entr'eux comme quarré à quarré, parce que C multipliant deux quarrez, les produits ſeront en même raiſon l'un à l'autre que ces quarrez : il eſt encore manifeſte que le même nombre C, multipliant le côté impair du primitif, qui eſt la difference des quarrez A^2 & B^2, produira la difference

Prop. 24. Supp. 6.

Supp. 4. de CA^2, & de CB^2, qui ne ſont point des nombres quarrez. Donc ſi un Triangle Rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PREMIERE REMARQUE.

On peut voir par ce qui eſt dit cy-deſſus, & par ce qui a été dit en la Propoſition 20, *qu'une même hypotenuſe d'un même triangle, peut être compoſée de deux nombres quarrez, dont la difference ſera un des côtez de ce triangle, & de deux autres non quarrez, qui ſeront entr'eux comme quarré à quarré, & qui auront pour difference l'autre côté du même triangle: comme au triangle* 6, 8, 10, *double du primitif* 3, 4, 5, *l'hypotenuſe* 10 *eſt le produit de* 2 *par* 5 (*ou* 4 + 1,) *& ce produit eſt égal à la ſomme de* 8 *&* 2, *qui ne ſont pas quarrez, mais ſont entr'eux comme quarré à quarré, & le même nombre* 2 *multipliant le côté impair* 3, *produit* 6, *qui eſt l'un des côtez de ce triangle double de l'impair du primitif, & eſt la differenee des deux nombres* 8 *&* 2: *mais auſſi ee même triangle* 6, 8, 10, *a deux nombres générateurs* 3 *&* 1, *dont les quarrez* 9 *&* 1 *compoſent la même hypotenuſe* 10, *& leur difference eſt* 8, *double du côté pair du primitif.*

SECONDE REMARQUE.

Il eſt poſſible qu'un même nombre ſoit l'hypotenuſe de pluſieurs triangles primitifs, & auſſi de pluſieurs triangles multiples, qui n'ont point de nombres générateurs, comme 65 *eſt l'hypotenuſe des triangles primitifs* 65, 63, 16; 65, 33, 56, *& auſſi des triangles multiples* 65, 52, 39, *&* 65, 60, 25, *qui n'ont point de nombres générateurs: mais chacun des côtez impairs de ces derniers, ne ſont pas la difference de deux nombres quarrez qui compoſent cette hypotenuſe, mais de deux nombres qui ſont entr'eux comme quarré à quarré. Les générateurs du premier triangle ſont* 1 *&* 8, *du ſecond* 4 *&* 7: *Mais le troiſiéme eſt multiple de* 3, 4, 5, *par* 13, *& le quatriéme multiple de* 5, 12, 13, *par* 5. *Les nombres qui compoſent*

l'hypotenuſe du troiſiéme, ſont 52 *&* 13, *qui étant multiples de* 4 *&* 1 *ſont entr'eux comme quarré à quarré; & du quatriéme,* 45 *&* 20, *qui ſont auſſi entr'eux comme quarré à quarré: leurs côtez multiples des impairs des primitifs ſont* 39, *difference de* 52 *&* 13; *&* 25, *difference de* 45 *&* 20: *Et parce qu'on voit par induction, que beaucoup de nombres premiers qui excedent de l'unité un nombre meſuré par* 4, *ſont les hypotenuſes d'un ſeul triangle primitif, & qu'on n'en trouve point dans une tres-grande ſuite de nombres qui n'ayent cette proprieté: comme* 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 101, *& que* 21 *&* 57, *qui excedent de l'unité un multiple de* 4, *mais qui ne ſont pas nombres premiers, n'ont pas cette proprieté: on peut conjecturer que cette régle eſt univerſelle. De même, parce qu'on trouve par induction, que le produit de deux de ces hypotenuſes, eſt l'hypotenuſe de deux triangles primitifs, que le produit de trois de ces hypotenuſes, eſt l'hypotenuſe de quatre triangles primitifs, que le produit de quatre de ces hypotenuſes eſt l'hypotenuſe de huit triangles primitifs, que le produit de cinq de ces hypotenuſes eſt l'hypotenuſe de ſeize triangles primitifs, &c. On peut conjecturer que la progreſſion des nombres de ces triangles ſera en raiſon double à l'infini, en multipliant toûjours la derniere hypotenuſe, par un nombre premier qui excede de l'unité un multiple de* 4.

EXEMPLES.

1105 *produit des trois nombres* 5, 13, 17. 8177 *produit de* 13, 17, 37. *Et* 3145 *produit de* 5, 17, 37, *ſont chacun l'hypotenuſe commune de quatre triangles primitifs, comme on le voit en la table ſuivante.*

1105		8177		3145	
1104	47	7665	2848	3127	336
817	744	4305	6952	2263	2184
943	576	3375	7448	1463	2784
1073	264	1905	7952	553	3096

32045, *produit de* 5, 13, 17, 29; *&* 40885, *produit de* 5, 13, 17, 37, *ſont chacun l'hypotenuſe de huit triangles primitifs, comme on le voit en la table ſuivante.*

CÔTEZ DES TRIANGLES.

	2277	31964
	30956	8283
	27044	17253
HYP.	24124	21093
32045	23067	22244
	27813	15916
	31323	6764
	32037	716

CÔTEZ DES TRIANGLES.

	40723	2636
	39917	8844
	37523	16236
HYP.	34387	22116
40885	26093	31476
	19667	35844
	14893	38076
	11603	39204

De même 237133, *produit de* 13, 17, 29, 37, *eſt l'hypotenuſe de huit triangles primitifs, dont les générateurs ſont en la table ſuivante.*

Générateurs.		Générateurs.	
62	483	243	422
93	478	258	413
98	477	282	397
138	467	307	378

Et on n'en trouvera point d'autres.

De même 1185665 *produit des nombres premiers*, 5, 13, 17, 29, 37, *eſt l'hypotenuſe de ſeize triangles primitifs, comme on les voit en la table ci-deſſous avec leurs nombres générateurs.*

Générateurs.		Côtez des Triangles.	
64	1087	1177473	139136
103	1084	1164447	223304
167	1076	1129887	359384
191	1072	1112703	409504
236	1063	1074273	501736
281	1052	1027743	591224
292	1049	1015137	612616
359	1028	927903	738104
449	992	782463	890816
512	961	661377	984064
568	929	540417	1055344
601	908	463263	1091416
607	904	448767	1097456
664	863	303873	1146064
673	856	279807	1152176
743	796	81567	1182856

Hypotenuſe commune
1185665.

Mais on trouvera auſſi par induction que le produit de deux de ces nombres premiers qui excedent de l'unité un multiple de 4, *eſt l'hypotenuſe de deux triangles multiples : que le produit de trois de ces nombres, eſt l'hypotenuſe de neuf triangles multiples ; & que le produit de quatre de ces nombres eſt l'hypotenuſe de trente-deux triangles multiples, & non davantage.*

EXEMPLES.

13	CÔTEZ.		17	CÔTEZ.	
5	60	25	5	77	36
65	52	39	85	84	13
17			29		
13	171	140	5	116	87
221	220	21	145	105	100

1105 *produit de* 5, 13, 17, *eſt l'hypotenuſe de neuf triangles multiples. Sçavoir :*

1105	1071	272
	561	952
	425	1020
HYP.	884	663
1105	1001	468
	1092	169
	975	520
	855	700
	1100	105

8177 *produit de* 13, 17, 37, *eſt l'hypotenuſe des neuf triangles multiples ſuivans.*

	CÔTEZ.	
	6327	2380
	8140	741
	7548	3145
HYP.	7215	2848
8177	8073	1300
	5577	5980

7735	2652
5423	6120
527	8160

2405 *produit de* 5, 13, 37, *eſt l'hypotenuſe des neuf triangles multiples ſuivans.*

CÔTEZ.

	2220	925
	1924	1443
	2331	592
HYP.	1221	2072
2405	1595	1800
	155	2400
	2275	780
	1989	1352
	2288	741

3145 *produit de* 5, 17, 37, *eſt l'hypotenuſe des neuf triangles multiples ſuivans.*

CÔTEZ.

	2849	1332
	3108	481
	2516	1887
HYP.	2775	1480
3145	2601	1768
	669	2992
	2975	1020
	3105	500
	2145	2300

Table des trente-deux triangles multiples, dont 40885 *produit de* 5, 13, 17, 37, *eſt l'hypotheſe commune.*

CÔTEZ DES TRIANGLES.

40749	3332	37037	17316
24221	22372	40404	6253
31059	26588	36075	19240
8211	40052	40365	6500
37740	15725	27885	29900
32708	24531	40848	1739
39627	10064	30229	27578
20757	35224	34891	21312
27115	30600	39701	9768
2635	40800	31635	25900
33813	22984	40700	3885
12597	38896	38325	14240
40651	4368	21525	34760
29419	28392	16875	37240
19019	36192	9525	39700
7189	40248		

Hypotenuſe commune
40885

Et puiſqu'un de ces nombres premiers comme 5, *ou* 13, *n'eſt l'hypotenuſe que d'un ſeul triangle primitif, & ne l'eſt d'aucun multiple, que le produit de deux de ces nombres eſt l'hypotenuſe de quatre triangles tant primitifs que multiples, que le produit de trois de ces nombres eſt l'hypotenuſe de treize triangles, & celui de quatre de ces nombres de quarante triangles, leſquels nombres* 1, 4, 13, 40, *ſont l'aggregé des nombres de ſuite en progreſſion triple* 1, 3, 9, 27, *on peut conjecturer que cette progreſſion peut aller à l'infini, ſelon les nombres en progreſſion triple, ſçavoir* 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.

& que par conſequent 1185665 *ſera l'hypotenuſe de* 121 *triangles, y compris les* 16 *primitifs, lequel nombre eſt la ſomme de* 1, 3, 9, 27, 81, *& que* 48612265 *produit des ſix nombres premiers* 5, 13, 17, 29, 37, *&* 41, *ſera l'hypotenuſe de* 364 *triangles y compris* 32 *primitifs. On pourra chercher ces triangles ſi l'on veut, ou même la démonſtration de ces proprietez, qui apparemment eſt très-difficile à trouver; car de même que pour démontrer les propoſitions précedentes & les ſuivantes touchant les proprietez des Triangles Rectangles en nombres; il a fallu trouver d'autres theorèmes que ceux des trois Livres des nombres d'Euclide: on peut croire qu'il en faudra encore d'autres pour parvenir à bien démontrer la plûpart des proprietez expliquées en cette remarque, horſmis la proprieté d'un ſeul de ces nombres premiers, qui eſt facile à démontrer, car puiſque* 13, *par exemple, eſt un nombre premier, il ne peut être l'hypotenuſe d'un triangle multiple, puiſqu'il ſeroit meſuré par le nombre qui auroit multiplié l'hypotenuſe du primitif, & par conſequent ne ſeroit pas premier contre l'hypotheſe.*

PROPOSITION XXVI.

En tout Triangle Rectangle, un des deux côtez eſt meſuré par trois.

DEMONSTRATION.

SI aucun des deux côtez n'étoit meſuré par trois, leurs quarrez ne le ſeroient pas auſſi: ces quarrez ſeroient donc ternaires +1, & leur ſomme ſeroit ternaire +2; qui par conſéquent ne ſeroit pas un nombre quarré, ce qui eſt abſurde; puiſqu'elle doit être le quarré de l'hypotenuſe. Donc en tout triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 3.
Prop. 5.
Def. 1. & Supp. 2.

PROPOSITION XXVII.

L'hypotenuſe d'un triangle primitif ne peut être meſurée par trois.

DEMONSTRATION.

SI l'hypotenuſe étoit meſurée par trois ; l'un des deux côtez étant meſuré par trois par la précedente, l'autre côté le ſeroit auſſi, & les trois côtez auroient une commune meſure ; & le triangle ne ſeroit pas primitif, contre l'hypotheſe. Donc, &c. Ce qui étoit à prouver.

Prop. 13.

PROPOSITION XXVIII.

En tout Triangle Rectangle un des côtez eſt meſuré par 4.

DEMONSTRATION.

D'Autant que dans les triangles primitifs le côté pair eſt le double produit d'un nombre pair & d'un impair ; & que le ſimple produit qui eſt pair eſt meſuré par deux : il s'enſuit que le double produit ſera meſuré par 4. Or dans les triangles multiples, un de leurs côtez étant multiple du côté pair du primitif ; ce côté multiple ſera auſſi meſuré par 4 : puiſqu'un nombre multiple d'un nombre meſuré par 4, eſt auſſi néceſſairement meſuré par 4. Donc en tout triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 14.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit qu'il n'y a aucun Triangle Rectangle dont chacun des côtez ſoit un nombre premier.

PROPOSITION XXIX.

Tout Triangle Rectangle a un de ſes trois côtez meſuré par 5.

DEMONSTRATION.

SI un des deux moindres côtez eſt meſuré par 5, la propoſition eſt véritable.

S'il n'y a aucun de ces deux côtez qui ſoit meſuré par 5, leurs quarrez ſeront differents de l'unité d'un nombre meſuré par 5, & chacun d'eux ſera quinaire +1, ou quinaire —1, ou l'un ſera quinaire +1, & l'autre quinaire —1. Prop. 8.

Ces quarrez ne peuvent être tous deux quinaires +1, ou tous deux quinaires —1, parce que leur ſomme ſeroit quinaire +2, ou quinaire —2, & ainſi elle ne ſeroit pas un quarré, comme il eſt requis. Conſ. Prop. 8. Supp. 1.

Il reſte donc que l'un de ces quarrez ſoit quinaire +1, & l'autre quinaire —1, & en ce cas leur ſomme qui eſt le quarré de l'hypotenuſe, ſera meſurée par 5, parce que 5 +1 ajoûté à 5—1, fait un quinaire; donc ſa racine qui eſt l'hypotenuſe, ſera meſurée par 5. Il eſt donc néceſſaire qu'un des trois côtez d'un Triangle Rectangle ſoit meſuré par 5. Ce qui étoit à prouver. Supp. 5.

PROPOSITION XXX.

L'aire de tout Triangle Rectangle eſt meſuré par ſix.

DEMONSTRATION.

OU l'un des côtez eſt meſuré par trois, & l'autre par quatre, ou un ſeul eſt meſuré par 3 & par 4; ſi l'un des côtez eſt meſuré par 3, & l'autre par 4, leur produit ſera meſuré par 12; & par conſéquent l'aire du triangle qui en eſt la moitié, ſera meſurée par 6: mais ſi l'un des côtez eſt meſuré par 3 & par 4; ce côté ſera auſſi meſuré par 12: donc ſon produit par l'autre côté quel qu'il ſoit, ſera meſuré par 12; & l'aire du triangle en ce ſecond cas, ſera auſſi meſurée par 6. Ce qui étoit à prouver. Prop. 26. & 28.

PROPOSITION XXXI.

L'aire de tout triangle multiple, eſt multiple de celle de ſon primitif par un quarré; & la racine de ce quarré eſt le nombre par lequel le primitif a été multiplié, pour faire le triangle multiple.

DEMONSTRATION.

Prop. 10. Supp. 2. PArce que le triangle primitif a un nombre pair pour un de ſes côtez; que ce côté ſoit 2 A, & l'autre ſoit B, ſon aire ſera A B. Que ces deux côtez ſoient multipliez par C, on aura un triangle multiple, dont les côtez ſeront 2 A C, & B C, & l'aire ſera A B C^2, qui eſt multiple de l'aire du primitif, ſçavoir A B, par C^2, dont la racine C, eſt le nombre par lequel le primitif a été multiplié: ce qui procede de ce que deux nombres comme A & B, étant multipliez par un nombre comme C; les deux produits ſe multipliant feront un nombre qui ſera auſſi le produit de A, C, B, C, Supp. 10. ſe multipliant en quelque ordre que ce ſoit; ſi donc on multiplie C, par C, on aura C^2, qui multipliant A B, produit de A, par B, ce produit ſera A B C^2.

CONSEQUENCE I.

Il s'enſuit que ſi l'aire d'un triangle primitif n'eſt point un nombre quarré, celle de ſon multiple ne le ſera point auſſi: puiſque C^2 étant multiplié par A B, aire du triangle Supp. 4. primitif, le produit A B C^2 ne ſera pas quarré, ſi A B n'eſt pas un quarré.

CONSEQUENCE II.

De même ſi l'aire d'un triangle primitif n'eſt pas double d'un nombre quarré; pas un des multiples de ce triangle, n'aura un double quarré pour ſon aire; car ſoient 4 A & B les côtez du triangle primitif, l'aire ſera 2 A B, & les côtez étant multipliez par C, l'aire du multiple ſera 2

ABC^2. Or il eſt évident que ſi $2AB$ n'eſt pas double quarré, $2ABC^2$ ne le ſera pas auſſi ; car AB ne ſera pas un quarré, ni par conſequent ABC^2 : donc $2ABC^2$ ne ſera pas un double quarré. Supp. 4.

PROPOSITION XXXII.

En tout triangle primitif la ſomme & la difference de l'hypotenuſe & du côté impair ſont chacun un double quarré.

DEMONSTRATION.

SOit A^2+B^2 l'hypotenuſe d'un triangle primitif, & A^2-B^2 le côté impair, il eſt évident que la ſomme de ces deux nombres eſt $2A^2$, double du quarré A^2, & leur difference $2B^2$, double du quarré B^2. Supp. 12.

CONSEQUENCE.

On fera voir par le même raiſonnement, qu'aux triangles multiples d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré ; la ſomme de l'hypotenuſe & d'un des côtez ſont enſemble un double quarré, & que leur difference eſt auſſi un double quarré : parce qu'en ces triangles l'hypotenuſe eſt la ſomme de deux quarrez : mais dans tous les autres multiples, la ſomme & la difference de l'hypotenuſe & du côté multiple de l'impair du primitif, ſeront entr'eux comme double quarré à double quarré, parce que deux doubles quarrez étant multipliez par le même nombre qui a multiplié les côtez du primitif, les produits demeureront toûjours en la raiſon de double quarré à double quarré : comme au triangle 9, 12, 15, multiple du primitif 3, 4, 5 ; 24 & 6, ſomme & difference du coté 9, & de l'hypotenuſe 15, ſont entr'eux comme 8 & 2, deſquels ils ſont multiples par le nombre 3, non quarré ni double quarré. Or 3 multipliant $4+1$ ou 5, fait l'hypotenuſe 15 compoſée de deux nombres 12 & 3, qui ſont entr'eux comme quarré à quarré, ſçavoir 1 & 4, & le côté Prop. 22. & 23. Supp. 9.

9 en eſt la difference. Et la ſomme de l'hypotenuſe 5 & du côté impair 3, étant 8, qui eſt un double quarré, & leur difference étant 2, qui eſt auſſi un double quarré, les produits de ces nombres par 3, ſçavoir 24 & 6 ſeront encore en la même raiſon de 8 à 2, c'eſt-à-dire de double quarré à double quarré : ce qui étoit à prouver.

PROPOSITION XXXIII.

En tout Triangle primitif la ſomme & la difference de l'hypotenuſe, & du côté pair, ſont chacun un nombre quarré : & la racine du plus grand de ces quarrez eſt la ſomme des deux nombres générateurs du triangle, & la racine du moindre en eſt la difference.

Démonſtration Algébrique.

A & B ſoient les nombres générateurs de quelconque triangle primitif, l'hypotenuſe ſera $A^2 + B^2$, & le côté pair 2 A B, dont la ſomme eſt égale au quarré de A + B, ſomme des deux générateurs, & leur difference ſçavoir $A^2 + B^2 - 2$ A B, ſera le quarré de A — B, difference des générateurs A & B. Ce qu'il falloit prouver. ſupp. 12.

CONSEQUENCE.

La même choſe arrivera aux triangles multiples d'un primitif par un quarré, & par un double quarré : ſçavoir que la ſomme de l'hypotenuſe & du côté pair, ſera un quarré : parce qu'ils ont deux nombres générateurs, par la conſéquence des 22 & 23 Prop. Mais cette ſomme & cette difference dans les triangles multiples d'un primitif, par un nombre qui n'eſt pas quarré, ni double quarré, ſeront l'une à l'autre comme quarré à quarré ; ce qui ſe prouvera par les mêmes raiſons de la conſéquence de la Propoſition précedente.

PROPOSITION

PROPOSITION XXXIV.

Si le côté pair & l'hypotenuſe d'un triangle primitif, ſont les générateurs d'un autre triangle : il ſera primitif, & ſon côté impair ſera un quarré. Et ſi le côté impair d'un triangle primitif eſt un nombre quarré, l'hypotenuſe de ce triangle ſera compoſée de deux quarrez, dont l'un aura pour racine l'hypotenuſe d'un deuxiéme triangle primitif, l'autre aura pour racine le côté pair du même deuxiéme triangle, & la racine du quarré, qui eſt le côté impair du premier triangle, ſera le côté impair du deuxiéme triangle.

DEMONSTRATION.

PArce que le côté impair de tout triangle primitif, eſt la difference de deux quarrez premiers entr'eux, dont la ſomme eſt l'hypotenuſe du même triangle ; ſi ce côté impair eſt un nombre quarré, on aura deux quarrez premiers entr'eux, qui joints enſemble feront un troiſiéme quarré ; & les racines de ces trois quarrez ſeront les trois côtez d'un deuxiéme triangle primitif. Prop. 20. Def. 1.

La premiere partie qui eſt la converſe de la deuxiéme ſe démontre en cette ſorte. Les quarrez du côté pair, & de l'hypotenuſe, ont pour difference le quarré de l'impair : ce quarré ſera donc le côté impair du deuxiéme triangle, qui ſera primitif, puiſque les générateurs ſont un pair, & un impair premiers entr'eux, Prop. 14.

Démonſtration Algebrique.

Que le côté impair du triangle ſoit $A - B^2 = Z^2$, donc $Z^2 + B^2 = A^2$ & on aura un deuxiéme triangle dont les trois côtez ſeront A, B, Z, duquel A ſera l'hypotenuſe, & Z en ſera le côté impair, puiſque ſon quarré eſt le côté impair du premier triangle : il reſtera donc B, pour le côté pair du deuxiéme triangle, donc l'hypotenuſe du premier triangle $A^2 + B^2$ eſt compoſée de deux quarrez, dont les

racines A & B ſont l'hypotenuſe, & le côté pair d'un deuxiéme triangle, & Z, racine du quarré qui eſt le côté impair du premier triangle par l'hypotheſe, ſera le côté impair du deuxiéme, & il eſt évident que ces deux nombres A & B, ſont premiers entr'eux, & par la 14e Prop. le triangle dont ils ſeront les générateurs, ſera primitif.

Exemple.

Soit le Triangle 9, 40, 41, dont les nombres générateurs ſont 4 & 5, & le côté impair 9 eſt quarré. Parce que l'hypotenuſe 41 eſt la ſomme des deux quarrez 25 & 16, dont 9 côté impair eſt la difference, & que cette difference eſt un quarré, il s'enſuit que ce quarré joint au moindre quarré des deux qui compoſent l'hypotenuſe, ſçavoir 16, fera un autre nombre quarré 25; & par conſéquent les trois racines de ces trois quarrez, ſeront les trois côtez d'un Triangle Rectangle, ſçavoir 3, 4, 5, dont le plus grand 5 ſera l'hypotenuſe.

PROPOSITION XXXV.

Si le côté pair d'un triangle primitif eſt un double quarré, les nombres générateurs de ce triangle ſeront des nombres quarrez, & l'hypotenuſe ſera la ſomme de deux quarrez quarrez.

DEMONSTRATION.

Prop. 10. PArce que le côté pair d'un triangle primitif eſt le double du produit des racines des quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, ſi ce double produit eſt un double quarré, Supp. 4. & 11. ſa moitié ſera un nombre quarré, qui ne peut être produit que par deux nombres quarrez, ou par deux nombres plans ſemblables: mais parce que ces nombres ſont les Conſ. Prop. 14. Supp. 12. générateurs d'un triangle primitif, ils ſeront premiers entr'eux, & par conſéquent ils ſeront nombres quarrez, & leurs quarrez dont la ſomme eſt l'hypotenuſe de ce

triangle, ſeront des quarrez quarrez : ainſi parce que 72 double du quarré 36 eſt le côté pair du triangle primitif 65, 72, 97, l'hypotenuſe 97 doit être compoſée de deux quarrez quarrez, qui ſont 81 & 16 : à cauſe que 36 moitié du côté pair étant un quarré, il ne peut être produit que par deux quarrez comme 4 & 9, puiſque le côté pair eſt le double du produit des deux nombres générateurs du triangle, qui doivent être premiers entr'eux, & que les quarrez de ces deux quarrez, qui ſont les quarrez quarrez 81 & 16, compoſent l'hypotenuſe 97. Supp. 11.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que tout nombre compoſé de deux quarrez quarrez, eſt l'hypotenuſe d'un triangle, dont le côté pair eſt un double quarré : car les racines de ces quarrez quarrez qui ſont des quarrez ſeront les générateurs du triangle : la ſomme de leurs quarrez qui ſont des quarrez quarrez, en ſera l'hypotenuſe, & le côté pair ſera le double de leur produit, lequel produit étant quarré, ce double produit ſera double quarré.

Exemple.

Le nombre 97 qui eſt compoſé des deux quarrez 16 & 81 eſt l'hypotenuſe du triangle primitif 65, 72, 97, dont les générateurs ſont 4 & 9, & le côté pair eſt 72, double du quarré 36 produit de 4 & 9 ; & quoique 36 ſoit auſſi le produit de deux autres quarrez 36 & 1, il ſera facile de connoître quels ſont les générateurs du triangle donné, parce que la difference de l'hypotenuſe & du côté impair, eſt toûjours double du moindre des deux quarrez quarrez, & par conſéquent 32 étant cette difference, ſa moitié 16 ſera ce quarré quarré, dont la racine 4 eſt l'un des générateurs du triangle. Prop. 32.

PROPOSITION XXXVI.

La difference de deux quarrez quarrez eſt le produit de l'hypotenuſe d'un triangle, par l'un des côtez du même triangle.

DEMONSTRATION.

Prop. 18. LE produit de la ſomme de deux nombres par leur difference eſt la difference des quarrez de ces nombres : donc ſi deux nombres ſont des quarrez, le produit de leur ſomme par leur difference, ſera la difference de leurs quarrez, qui ſont des quarrez quarrez. Mais ces quarrez ſont inégaux, puiſque leurs quarrez quarrez ont une difference ; & par conſéquent leur ſomme ſera l'hypote-
Prop. 10. nuſe d'un triangle, & leur difference en ſera l'un des côtez. Donc la difference de deux quarrez quarrez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XXXVII.

En tout triangle, auquel l'hypotenuſe eſt la ſomme de deux quarrez, le produit de l'hypotenuſe par le côté qui eſt la difference des quarrez qui la compoſent, eſt la difference de deux quarrez quarrez, dont les racines quarrées quarrées ſont les générateurs du triangle.

DEMONSTRATION *Algebrique.*

$A^2 + B^2$ eſt l'hypotenuſe d'un Triangle Rectangle, $A^2 - B^2$, le côté qui eſt la difference de A^2 & B^2 ; leur produit $A^4 - B^4$ eſt la difference des quarrez quarrez
Supp. 22. A^4 & B^4 dont les racines quarrées quarrées ſont A & B qui ſont les générateurs du triangle. Or il eſt évident que la difference des quarrez de A^2 & B^2, eſt le produit de
Prop. 18. leur ſomme $A^2 + B^2$, par leur difference $A^2 - B^2$. Mais les quarrez de A^2 & B^2, ſont des quarrez quarrez, dont

les racines quarrées ſont A & B ; donc le produit de $A^2 + B^2$ par $A^2 - B^2$, ſera la difference de deux quarrez quarrez : dont les racines quarrées quarrées ſeront les nombres générateurs du triangle. Ce qui étoit à prouver.

PROPOSITION XXXVIII.

Si dans un Triangle primitif, l'hypotenuſe étoit un nombre quarré, & pareillement le côté pair un nombre quarré : la racine de cette hypotenuſe ſeroit l'hypotenuſe d'un autre Triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour ſon côté impair, & un double quarré pour ſon côté pair.

DEMONSTRATION.

PArce que le côté pair d'un triangle primitif, eſt le double produit des nombres générateurs du triangle ; ſi ce double produit étoit un nombre quarré, le ſimple produit ſeroit un double quarré, qui ne peut être fait que par un quarré, & par un double quarré, ou par deux nombres qui ſoient entr'eux comme quarré à double quarré : mais parce que le triangle eſt ſuppoſé primitif, le générateur impair ſera un quarré, & l'autre générateur un double quarré : car l'impair ne peut être double quarré : & parce que les quarrez de ces nombres qui ſont premiers entr'eux, étant joints enſemble font l'hypotenuſe ; il s'enſuit que l'hypotenuſe ſeroit la ſomme d'un quarré quarré, & d'un quarré dont la racine ſeroit un double quarré ; mais l'hypotenuſe étant un quarré par l'hypotheſe, on auroit deux quarrez qui feroient un quarré, & les racines de ces trois quarrez ſeroient des nombres premiers entr'eux, & ſeroient l'hypotenuſe & les deux côtez d'un autre triangle, dont le côté impair ſeroit un quarré, & l'autre un double quarré. Donc ſi dans un triangle primitif tant l'hypotenuſe que le côté pair étoient des quarrez ; il en proviendroit un autre triangle primitif moindre, dont le

Prop. 29.

Supp. 11.

Eucl. 7.

Def. 1.

côté impair ſeroit un quarré, & le côté pair un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XXXIX.

Il n'y a aucun Triangle Rectangle en nombres, dont l'aire ſoit un nombre quarré.

DEMONSTRATION.

SOit premierement quelconque triangle primitif; je dis que ſon aire ne peut être un quarré. Car afin qu'il eût un quarré pour ſon aire, il faudroit que de ſes deux côtez, l'un fût quarré, ſçavoir l'impair; car il ne peut être double quarré & l'autre double quarré. Or dans ce triangle primitif, le côté impair étant quarré, les nombres
Prop. 34. générateurs du triangle ſeroient l'hypotenuſe, & le côté pair d'un deuxiéme triangle primitif, & parce que le côté pair du premier ſeroit un double quarré, ces mêmes nombres générateurs du premier triangle ſeroient quarrez.
Prop. 35. Donc l'hypotenuſe, & le côté pair de ce deuxiéme triangle ſeroient des quarrez, & ce triangle ſeroit moindre que le premier, puiſque deux de ſes côtez ſeroient les gé-
Prop. 38. nérateurs de ce premier. Mais par la précedente, la racine de l'hypotenuſe de ce deuxiéme triangle, ſeroit l'hypotenuſe d'un troiſiéme triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour ſon côté impair, & un double quarré pour ſon côté pair; & ce troiſiéme triangle ſeroit encore moindre que le deuxiéme. Or ce troiſiéme triangle auroit auſſi pour ſon aire un nombre quarré. D'où il s'enſuit que ſuppoſant un Triangle Rectangle primitif, dont l'aire ſoit un nombre quarré, on en trouvera un troiſiéme en nombres entiers par une conſéquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit auſſi un quarré pour ſon aire, & que par les mêmes raiſons ce troiſiéme en donneroit encore un cinquiéme plus petit, qui ſeroit auſſi primitif, & par conſéquent en nombres entiers, & ainſi à l'infini en

diminuant toûjours. Mais cette conſéquence eſt abſurde ; car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en deſcendant, puiſqu'ils commencent par l'unité, & s'y terminent ; & par conſéquent il eſt impoſſible que l'aire d'un Triangle Rectangle primitif, ſoit un nombre quarré. Il a été auſſi prouvé par la conſéquence de la propoſition 31e. Que ſi l'aire d'un primitif n'eſt pas un nombre quarré, celle de ſon multiple ne ſera pas auſſi un quarré. Donc il n'y a aucun triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XL.

Il n'y a aucun Triangle Rectangle en nombres dont l'aire ſoit un double quarré.

DEMONSTRATION.

SI un triangle primitif avoit un double quarré pour ſon aire, il faudroit que chacun de ſes moindres côtez fût un nombre quarré, afin que la moitié de leur produit qui eſt l'aire du triangle, fût un double quarré : mais chacun de ces côtez ne peut être un quarré : car le côté impair étant un quarré, les nombres générateurs de ce triangle ſeroient l'un l'hypotenuſe, & l'autre le côté pair d'un deuxiéme triangle primitif moindre que le premier, & parce que le côté pair du premier eſt auſſi ſuppoſé être un quarré, & que ce côté pair eſt le double produit des deux nombres générateurs du premier triangle : l'un de ces nombres générateurs ſeroit un quarré, & l'autre un double quarré, puiſqu'ils doivent être premiers entr'eux. Or ces mêmes nombres ſont l'hypotenuſe & le côté pair du deuxiéme triangle : donc ce ſecond triangle qui doit être primitif, auroit un quarré pour ſon hypotenuſe, & un double quarré pour ſon côté pair : puiſque l'hypotenuſe étant un impair, ne peut être un double quarré, d'où il s'enſuivroit que l'hypotenuſe de ce ſecond triangle ſeroit la ſomme de deux quarrez quarrez : & parce que

Supp. 11.
Prop. 34.
Prop. 10.
Supp. 11.
Prop. 34.
Prop. 20.
Prop. 35.

cette hypotenuſe doit être un nombre quarré, on auroit un quarré, qui ſeroit la ſomme de deux quarrez quarrez; & les racines de ces trois quarrez ſeroient les trois côtez
Def. 1. d'un troiſiéme triangle primitif moindre que les précedens, qui auroit un quarré pour chacun de ſes moindres côtez, & par conſéquent ſon aire ſeroit un double quarré, comme du premier triangle qu'on a ſuppoſé avoir un double quarré pour ſon aire: & parce que de ce premier triangle proviendroit ce troiſiéme beaucoup moindre, qui ſeroit auſſi primitif, & qui auroit un double quarré pour ſon aire; de même de ce troiſiéme, il en proviendroit un cinquiéme encore moindre, qui ſeroit auſſi primitif, & par conſequent en nombres entiers; on conclura par un raiſonnement ſemblable à celui de la propoſition précedente, qu'il n'y a aucun Triangle Rectangle primitif en nombres dont l'aire ſoit un double quarré. Mais par la deuxiéme conſéquence de la Propoſition 31e, ſi l'aire d'un primitif n'eſt pas un double quarré, celle d'aucun des triangles multiples de ce primitif ne ſera un double quarré. Donc il n'y a aucun Triangle rectangle en nombres, dont l'aire ſoit un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCES
des deux dernieres Propoſitions.

Premiere Conſéquence de la trente-neuviéme.

IL n'y a point de Triangle rectangle auquel l'un des moindres côtez ſoit un nombre quarré, & l'autre un double quarré; car ſon aire ſeroit un quarré. Ce qui a été prouvé impoſſible.

II.

Il n'y a point de Triangle rectangle auquel tant l'hypotenuſe, que le côté pair, ſoit un nombre quarré; parce
Prop. 38. que de ce Triangle il en proviendroit un autre, dont le côté

côté impair ſeroit quarré, & le pair un double quarré, & par conſéquent ſon aire ſeroit un quarré.

III.

Un quarré étant joint à un quarré dont la racine ſoit un double quarré, ne peut faire un quarré; car ſi cette ſomme étoit un quarré, les racines de ces deux quarrez ſeroient les deux côtez d'un triangle, dont l'un ſeroit un quarré, & l'autre un double quarré: ce qui eſt contre la premiere Conſéquence.

IV.

Un quarré quarré impair ne peut être la ſomme d'un quarré quarré pair, & d'un quarré impair: car les trois racines de ces trois quarrez ſeroient un Triangle rectangle, dont l'hypotenuſe & le côté pair, ſeroient quarrez; ce qui eſt contre la deuxiéme Conſéquence; & par la même deuxiéme Conſéquence un quarré impair ne peut être la difference de deux quarrez quarrez.

V.

Il s'enſuit auſſi que la difference du quarré de l'hypotenuſe d'un triangle, au quarré tant de la ſomme que de la difference des deux côtez du triangle, ne pourra être un nombre quarré: car puiſque cette difference eſt quadruple de l'aire du Triangle, & que cette aire ne peut être un quarré, cette difference ne pourra être un quarré: puiſque le produit de 4 qui eſt un quarré, par un nombre non quarré, ne peut être quarré. Conſ. Prop. 121. Supp. 4.

VI.

Il eſt encore manifeſte, qu'il n'y a point de Triangle rectangle primitif dont l'hypotenuſe étant un quarré, le côté impair ſoit auſſi un quarré: car le produit de ces deux quarrez ſeroit la difference de deux quarrez quarrez Prop. 374.

qui compoſeroient l'hypotenuſe d'un Triangle rectangle, dont les générateurs ſeroient des nombres quarrez, & le côté impair ſeroit cette difference ; or le côté pair
Supp. 4. de ce dernier triangle ſeroit un double quarré, & le côté impair un quarré, ce qui eſt contre la premiere Conſéquence.

Conſéquence de la Propoſition 40e.

I.

Il n'y a aucun Triangle rectangle qui ait un quarré pour chacun de ſes moindres côtez ; car l'aire ſeroit un double quarré.

I I.

Un quarré ne peut être la ſomme de deux quarrez quarrez ; parce que les racines de ces trois quarrez ſeroient les trois côtez d'un triangle, auquel chacun des deux moindres côtez ſeroit un quarré ; contre la premiere Conſéquence.

I I I.

Il n'y a aucun Triangle rectangle primitif qui ait un quarré pour ſon hypotenuſe, & un double quarré pour ſon côté pair ; parce que l'hypotenuſe ſeroit la ſomme de deux quarrez quarrez : ainſi on auroit un quarré, qui ſeroit la ſomme de deux quarrez quarrez, contre la deuxiéme Conſéquence.

I V.

Un quarré quarré ne peut être la ſomme de deux quarrez, dont l'un ait pour racine un double quarré ; parce que les racines de ces trois quarrez ſeroient les trois côtez d'un triangle, qui auroit un nombre quarré pour ſon hypotenuſe, & un double quarré pour ſon côté pair, contre la troiſiéme Conſéquence.

PROPOSITION XLI.

En tout triangle primitif, la ſomme des deux côtez eſt octonaire +ou —1, & la difference des mêmes côtez eſt auſſi octonaire +ou —1, ou eſt l'unité même.

DEMONSTRATION.

SOient A & B les générateurs du triangle, dont A ſoit le nombre pair, & ſoit premierement A pairement pair & plus grand que B: d'autant que le quarré de A eſt octonaire, & le quarré de B octonaire +1, ou l'unité, leur difference qui eſt le côté impair du Triangle ſera octonaire —1; or le côté pair ſera octonaire, puiſqu'il eſt double de A B quaternaire: donc la ſomme de ces deux côtez en ce premier cas ſera octonaire —1. Que ſi A eſt moindre que B, ſon quarré qui eſt octonaire, étant ôté du quarré de B qui eſt octonaire +1, le reſte qui eſt le côté impair ſera octonaire +1, car cette difference ne peut être l'unité; & le côté pair étant octonaire, la ſomme des deux ſera octonaire +1 en ce ſecond cas. Prop. 4. Prop. 5.

Soit maintenant A impairement pair & plus grand que B, ſon quarré ſera 4, ou octonaire +4, duquel étant ôté le quarré de B qui eſt l'unité, ou un octonaire +1, le reſte qui eſt le côté impair ſera 3 ou octonaire +3, mais A étant 2 ou quaternaire +2, A B ſera 2 ou quaternaire +2, & 2 A B côté pair ſera octonaire +4, donc en ce troiſiéme cas la ſomme de ces deux côtez ſera 7 ou octonaire +7, c'eſt-à-dire octonaire —1. Prop. 4. Prop. 5.

Que ſi A eſt moindre que B, ayant ôté 4 ou un octonaire +4 quarré de A, d'un octonaire +1 quarré de B, le reſte ſera 5, ou octonaire +5 pour le côté impair, lequel étant joint au côté pair qui eſt octonaire +4, la ſomme ſera octonaire +9, c'eſt-à-dire octonaire +1, en ce quatriéme & dernier cas: donc la ſomme des deux côtez d'un triangle primitif eſt octonaire +ou —1.

Pour la deuxiéme partie, ſoit au premier cas ci-deſſus, le côté impair moindre que le côté pair, d'autant qu'il eſt octonaire — 1 ; il eſt évident que ſi on l'ôte du côté pair qui eſt octonaire, le reſte ſera octonaire + 1, ou l'unité, & que ſi le côté impair eſt le plus grand, leur difference ſera octonaire — 1.

Au ſecond cas, ſi le côté pair eſt le plus grand, ayant ôté un octonaire + 1 d'un octonaire, le reſte ſera octonaire — 1, & ſi le côté pair eſt le moindre, leur difference ſera octonaire + 1, ou l'unité.

Au troiſiéme cas, ſi le côté pair eſt le plus grand, & qu'on ôte 3, ou un octonaire + 3, de 4 ou d'un octonaire + 4 ; le reſte ſera octonaire + 1, ou l'unité ; & ſi le côté pair eſt le moindre, ôtant un octonaire + 4, d'un octonaire + 3, le reſte ſera octonaire — 1.

Au quatriéme & dernier cas, ſi le côté pair eſt le plus grand, qui eſt octonaire + 4, & qu'on en ôte l'impair qui eſt 5, ou octonaire + 5, le reſte ſera octonaire — 1, & ſi le côté pair eſt le moindre, leur difference ſera octonaire + 1, ou l'unité. Donc en tout Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

TRAITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

SECONDE PARTIE.

CETTE ſeconde Partie contient ſeulement deux Problêmes.

Le premier, eſt de trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres, dont chacun ait pour ſon aire celle d'un Triangle donné.

Le ſecond, eſt de trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres qui ayent une même aire.

Il eſt manifeſte que la ſolution du premier Problême ne ſe peut donner univerſellement en nombres entiers, comme le nombre 6 ne peut être l'aire que du ſeul Triangle 3, 4, 5. La raiſon eſt que le nombre 12, qui eſt le produit des deux côtez 3 & 4, & qui eſt le double de cette aire 6, ne peut être produit par d'autres nombres entiers, que par 1 & 12, & par 2 & 6, & que chacun de ces nombres 1 & 2 ne peut être le côté d'un Triangle Rectangle par la troiſiéme Conſéquence de la Propoſition vingtiéme : il eſt donc néceſſaire que les autres Triangles Rec-

tangles, dont l'aire ſera égale à 6, ayent leurs côtez exprimez par des fractions. Il en eſt de même du nombre 30, qui ne peut être l'aire en nombres entiers que du ſeul triangle 5, 12, 13; mais on peut bien trouver un nombre entier qui ſoit l'aire de tant de Triangles rectangles qu'on voudra, dont les trois côtez ſoient des nombres entiers.

PREMIERE PROPOSITION.

LEMME,

Si le produit de deux nombres eſt meſuré par un quarré, & que chacun de ces nombres ſoit diviſé par la racine de ce quarré, le produit des deux quotiens ſera égal au premier produit diviſé par le même quarré.

DEMONSTRATION.

SOient les deux nombres A C & B C, leur produit ſera A B C^2; il eſt évident que ſi on diviſe chacun de ces nombres par C, on aura A & B, dont le produit A B eſt égal à A B C^2 diviſé par C^2; ou bien ſi les deux nombres ſont A & B C^2, leur produit ſera comme devant A B C^2; & ſi on diviſe chacun de ces nombres A & B C^2 par C, ſçavoir par la racine du quarré qui meſure leur produit, on aura $\frac{A}{C}$ & B C, dont le produit eſt A B comme devant.

PROPOSITION II.

Trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres, dont chacun ait pour ſon aire celle d'un Triangle donné.

SOit un Triangle Rectangle quelconque A, B, C, dont les moindres côtez ſoient A & B, ſon aire ſera $\frac{1}{2}$ A B. On demande d'autres Triangles en telle multitude qu'on voudra, dont chacun ait $\frac{1}{2}$ A B pour ſon aire.

PREPARATION.

Ce Problême ſe réduit à trouver d'autres Triangles rectangles qui ne gardent pas la même proportion entre leurs côtez, & dont l'aire ſoit multiple de $\frac{1}{2}$ A B par un quarré.

La raiſon eſt que ſi on diviſe les côtez de chacun de ces Triangles par la racine du quarré, par lequel ſon aire eſt multiple de l'aire $\frac{1}{2}$ A B, le Triangle qui en proviendra aura $\frac{1}{2}$ A B pour ſon aire, puiſqu'elle eſt le produit d'un des cotez du Triangle par la moitié de l'autre.

On obſervera qu'aux Triangles ſuivans qui ſervent à la ſolution du Problême, on met au premier lieu le côté qui eſt la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, ou qui eſt multiple de l'impair du primitif, quand le Triangle multiple n'a point de nombres générateurs, & on l'appelle toûjours le premier côté en cette deuxiéme Partie; on met enſuite le côté pair & l'hypotenuſe après. Et parce que l'operation ne fait pas voir ſi le premier côté eſt moindre que le ſecond, ou s'il eſt plus grand, c'eſt-à-dire ſi le côté A *eſt plus grand que* B, *ou s'il eſt moindre, on ſe ſert de la marque* = *qui ſignifie difference. Ainſi les moindres côtez du Triangle donné étant* A B, *le côté impair du premier Triangle trouvé ſera* $A^2 = B^2$, *ſçavoir la difference entre* A^2 *&* B^2 *: de maniere que ſi* B *eſt plus grand que* A, *ce côté impair ſera* $B^2 - A^2$; *mais ſi* A *eſt plus grand que* B, *ce côté ſera* $A^2 - B^2$.

Et pour éviter la confuſion des caracteres, lorſque le premier côté ſe doit exprimer par le ſigne = *ou l'hypotenuſe par le ſigne* +, *on ſe ſert d'un caractere nouveau pour les exprimer, & on met au-deſſous la valeur de ce caractere en petites lettres, comme on verra dans la ſuite.*

SOLUTION DU PROBLEME.

PREMIERE CONSTRUCTION.

QUE A, B, C ſoient les côtez d'un Triangle rectangle quelconque, je prens les deux côtez A & B pour les nombres générateurs d'un autre Triangle, qui ſera $A^2 = B^2$, 2 A B, $A^2 + B^2$: & afin de ne point augmenter la multitude des caractéres, je mets D au lieu de $A^2 = B^2$; & parce que la ſomme des quarrez des deux côtez d'un Triangle rectangle eſt le quarré de l'hypotenuſe, on prendra C^2 pour l'hypotenuſe de ce Triangle qu'on mettra au lieu de $A^2 + B^2$, & le Triangle ſera D, 2 A B C^2, & c'eſt le premier Triangle trouvé; & au-deſſous de D on mettra $a^2 = b^2$, qui eſt la valeur de D.

Premier Triangle trouvé.

SECONDE CONSTRUCTION.

QUE l'hypotenuſe C^2 & le côté pair de ce premier Triangle trouvé, ſçavoir 2 A B, ſoient pris pour les nombres générateurs d'un ſecond Triangle, ils formeront le Triangle $C^4 = 4 A^2 B^2$, 4 A B C^2, $4 A^2 B + C^4$.

Que l'hypotenuſe $4 A^2 B^2 + C^4$ ſoit nommée E, à cauſe qu'elle a le ſigne +, ſuivant ce qui a été remarqué ci-devant.

Et parce qu'en tout Triangle rectangle la difference des quarrez de l'hypotenuſe, & d'un des côtez eſt le quarré de l'autre côté, il s'enſuit que cet autre côté étant $C^4 = 4 A^2 B^2$, il ſera égal à D^2, qui eſt le quarré du premier côté du premier Triangle trouvé. Le deuxiéme Triangle ſera donc,

D^2, 4 A B C^2, E

$4 a^2 b^2 + c^4$

Deuxiéme Triangle trouvé.

Les caractéres $4 a^2 b^2 + c^4$ *qui ſont au-deſſous de* E, *marquent ſa valeur.*

L'aire de ce ſecond Triangle eſt 2 A B $C^2 D^2$, qui étant diviſée

divisée par $\frac{1}{2}$ A B aire du Triangle donné, on aura pour quotient 4 $C^2 D^2$ qui est un quarré; sa racine est 2 C D, par laquelle le second Triangle D^2, 4 A B C^2, E étant divisé, on aura le Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ A B, sçavoir la moitié du produit de $\frac{D}{2C}$ par $\frac{2ABC}{D}$, qui est la même que celle du Triangle donné.

Or avec ce second Triangle on en fera un troisiéme par la premiere Construction, prenant pour ses générateurs les deux côtez de ce second, qui sont D^2 & 4 A B C^2; & si on prend le côté pair & l'hypotenuse de ce troisiéme Triangle pour les générateurs d'un autre Triangle, suivant la seconde Construction, on aura un quatriéme Triangle, & ainsi de suite.

Pour éclaircir cela davantage.

Que les trois côtez du second Triangle soient nommez F, G, E: si on prend les deux côtez F, G, pour les générateurs d'un troisiéme Triangle, suivant la premiere Construction, ce troisiéme Triangle sera $F^2 = G^2$, 2 F G, E^2, dont l'hypotenuse doit être un nombre quarré, parce que le Triangle F, G, E, tient ici lieu d'un Triangle donné, & ce troisiéme tiendra lieu d'un premier Triangle trouvé. De maniere que si on prend l'hypotenuse E^2, & le côté pair 2 F G de ce premier Triangle trouvé pour les générateurs d'un autre Triangle, il en viendra un quatriéme, dont le premier côté sera un nombre quarré, comme au deuxiéme Triangle; & l'aire de ce quatriéme sera multiple par un quarré de 2 A B $C^2 D^2$, qui est l'aire du second Triangle, comme cette aire est multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, aire du Triangle donné. Et par conséquent l'aire de ce quatriéme Triangle sera aussi multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, & ainsi consécutivement on fera tant de Triangles qu'on voudra, dont l'aire sera multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B; & les côtez de ces Triangles étant divisez par la racine de ce quarré, on aura des Triangles qui auront $\frac{1}{2}$ A B pour leur aire. Prop. 13

Voici huit Triangles, qui viennent du Triangle donné A, B, C, entre leſquels il y en a quatre, dont l'aire eſt multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ AB, ſçavoir de l'aire du Triangle donné ; & ces Triangles ſont le deuxiéme, le quatriéme, le ſixiéme, & le huitiéme, qui ont leur rang marqué par un nombre pair.

PREMIERE TABLE.

	Premier côté	Côté pair	Hypot.
Triangle donné,	A,	B,	C, aire $\frac{1}{2}$ AB
1er Triangle trouvé	D,	2 AB,	C^2 $a^2 = b^2$.
2e Triangle	D^2,	4 AB C^2,	E aire 2 AB C^2 D^2. $4a^2b^2 + c^4$
3e Triangle	F,	8 AB C^2 D^2,	E^2. $d^4 = 16a^2b^2c^4$.
4e Triangle	F^2,	16 AB C^2 D^2 E^2,	G aire 8 AB C^2 D^2 E^2 F^2. $64a^2b^2c^4d^4 + e^4$.
5e Triangle	H,	32 AB C^2 D^2 E^2 F^2,	G^2. $f^4 = 256a^2b^2c^4d^4e^4$.
6e Triangle	H^2,	64 AB C^2 D^2 E^2 F^2 G^2,	I $1024a^2b^2c^4d^4e^4f^4 + g^4$. aire 32 AB C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2.
7e Triangle	K,	128 AB C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2	I^2. $h^4 = 4096a^2b^2c^4d^4e^4f^4g^4$.

8e Triangle K^1, 256 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$, L
16384 $a^2b^2c^4d^4e^4f^4g^4h^4 + i^4$.
aire 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$,

On observera en ces huit Triangles, que l'hypotenuſe & le premier côté ſont alternativement marquez d'un ſeul caractére non quarré; & alors on met au-deſſous de ce caractére ſa valeur, exprimée en petites lettres, qui ſont les mêmes que celles du côté pair du même Triangle, & qui viennent du Triangle précédent.

De même l'hypotenuſe & le premier côté ſont alternativement exprimez par un caractére quarré, où on remarquera que lorſque le premier côté eſt un nombre quarré, l'hypotenuſe ne l'eſt pas; & alors ce Triangle a ſon aire multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, *& on écrit cette aire après le Triangle. On pourroit obmettre les Triangles dont l'ordre eſt marqué par un nombre impair; ſçavoir, le premier, le troiſiéme, le cinquiéme, & le ſeptiéme, dont l'aire n'eſt pas multiple par un quarré de l'aire* $\frac{1}{2}$ A B: *mais pour la facilité de la démonſtration on les a compris dans cette Table.*

On voit aſſez par l'inſpection de la Table qu'on la peut aiſément continuer tant qu'on voudra, puiſque le côté pair n'augmente à chaque Triangle que d'un caractere, à commencer au ſecond Triangle trouvé, & mettant au devant des caracteres le double du nombre qui eſt devant le côté pair du Triangle précédent.

Pour ce qui eſt de l'aire, elle augmente de deux caractéres, qui ont la marque de quarré, à cauſe qu'on ne la met que de deux en deux Triangles, ſçavoir à ceux dont l'ordre eſt marqué par un nombre pair. Ces deux caractéres ſont ceux qui marquent le premier côté du même Triangle, & l'hypotenuſe du Triangle précédent: chacun de ces caractéres a la marque de quarré; & on met au devant de tous les caractéres le quadruple du nombre qui eſt devant les caractéres de l'aire précédente.

Pour l'hypotenuſe & le premier côté, on les marque aiſément, mettant en leur lieu un caractère nouveau, en la façon qu'on le peut remarquer dans la Table précédente.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident, par la premiere conſtruction, que l'hypotenuſe du premier Triangle trouvé eſt toujours le quarré de l'hypotenuſe du Triangle précédent, qui eſt le Triangle donné ; que le côté pair de ce premier Triangle trouvé eſt quadruple de l'aire du Triangle donné, puiſqu'il eſt double du produit de ces côtez, & que l'aire n'eſt que la moitié de ce produit.

Et parce que le ſecond Triangle eſt formé par l'hypotenuſe du premier Triangle trouvé qui eſt toujours un nombre quarré & par le côté pair du même premier Triangle, qui eſt multiple par un quarré ; ſçavoir par quatre de l'aire du Triangle donné, le côté pair de ce ſecond Triangle ſera multiple par un double quarré de l'aire du Triangle donné.

Premiere Conſtruction.

Or le premier côté de ce ſecond Triangle eſt toujours un nombre quarré. Donc l'aire de ce ſecond Triangle, qui eſt la moitié du produit des deux côtez de ce Triangle, eſt multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné.

Deuxiéme Conſtruction.

Or tout ce qui arrive au premier & au ſecond Triangle, enſuite & par le moyen du Triangle donné, arrive auſſi au troiſiéme & au quatriéme enſuite du ſecond, parce que ce ſecond Triangle pouvant être pris pour le Triangle donné, le troiſiéme ſe forme de ce ſecond, & le quatriéme du troiſiéme en la même façon que le premier Triangle trouvé ſe forme du Triangle donné, & le ſecond du même premier.

On doit faire le même jugement du cinquiéme & du ſixiéme Triangle, qui ſe font par le moyen du quatriéme, & du ſeptiéme & huitiéme qui viennent du ſixiéme, & ainſi des autres ſuivans à l'infini.

Digitized by Google

De là s'enſuit que comme on a fait voir que l'aire du ſecond Triangle eſt multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné, auſſi l'aire du quatriéme ſera multiple par un quarré de l'aire du ſecond, & l'aire du ſixiéme de celle du quatriéme, & ainſi de ſuite.

Donc l'aire de tous ces Triangles, dont l'ordre eſt côté par un nombre pair, ſçavoir le deuxiéme, le quatriéme, le ſixiéme & les autres enſuite ont leur aire multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné, ce qui étoit à démontrer.

Il eſt aiſé de faire voir auſſi que les Triangles qui viennent du Triangle donné par la méthode précédente ne gardent pas une même proportion ou raiſon entre leurs côtez, c'eſt-à-dire, que leurs côtez ne ſont pas multiples des côtez du Triangle donné, ni de ceux qui viennent enſuite; car ſi on ſuppoſe que le Triangle donné ſoit primitif, le premier Triangle qu'il faut trouver ayant pour ces générateurs les côtez du Triangle donné, qui ſont premiers entre eux, la difference de leurs quarrez n'aura point de commune meſure avec aucun d'eux, ni avec le double de leur produit. Or cette difference eſt le premier côté de ce premier Triangle, & le double du produit des côtez en eſt le côté pair: donc les côtez de ce premier Triangle ſeront auſſi premiers entr'eux, & par conſéquent avec l'hypotenuſe. De même, parce que l'hypotenuſe & le côté pair du premier Triangle trouvé ſont les générateurs du ſecond Triangle, puiſque ces nombres ſont premiers entre eux, & l'un pair & l'autre impair; la ſomme de leurs quarrez, qui eſt l'hypotenuſe de ce ſecond Triangle, n'aura point de commune meſure avec aucun de ces nombres générateurs ni avec leur produit, ni le double de ce produit, cette ſomme étant un nombre impair. Donc l'hypotenuſe de ce ſecond Triangle n'aura point de commune meſure avec le côté pair, qui eſt ce double produit, ni par conſéquent avec le premier côté.

Prop. 13. I. Partie.

Prop. 15. I. Partie.

Donc ce ſecond Triangle ſera encore primitif ; & ainſi ſes côtez ne garderont pas entre eux la même proportion que ceux du Triangle donné, ni les autres Triangles qui ſeront formez de ce ſecond, qui peut tenir lieu du Triangle donné.

Or ſi les côtez de ces Triangles formez par celui qui a été donné, ne gardent pas entre eux la même proportion que les côtez du donné, leurs multiples ne la garderont pas auſſi, parce que les Triangles multiples gardent toujours la même proportion entre leurs cotez que leurs primitifs. Et ainſi cela ſe trouvera véritable, tant aux primitifs qu'aux multiples, quoique les côtez des multiples ayent une commune meſure.

Il a été néceſſaire de mettre cette condition aux Triangles pour faire qu'un même nombre ſoit l'aire de pluſieurs Triangles ; parce que comme tout Triangle multiple a ſon aire multiple par un quarré de celle de ſon primitif, & que la racine de ce quarré eſt le nombre par lequel le Triangle primitif a été multiplié ; ſi les Triangles étoient multiples d'un même Triangle, lorſqu'on viendroit à diviſer le Triangle multiple par cette racine, le Triangle qui en viendroit ſeroit le primitif donné, & ainſi on n'auroit que ce même Triangle, & on ne ſatisferoit pas à la propoſition. Ainſi le Triangle donné étant 3, 4, 5, ce ne ſeroit pas aſſez de prendre les Triangles 6, 8, 10, ou 9, 12, 15, pour faire des Triangles qui euſſent une même aire, quoique l'aire de chacun de ces deux Triangles ſoit multiple par un quarré de celle de 3, 4, 5, parce que leurs côtez gardent entre eux la même proportion que les côtez du Triangle donné, 3, 4, 5.

Prop. 31. I. Partie.

Mais pour revenir au Problême principal, puiſque chacune des aires trouvées par la Méthode précédente eſt multiple par un quarré de celle du Triangle donné, ſi on diviſe chacune d'elles par l'aire du Triangle donné, on aura un quarré par la racine duquel diviſant le Triangle

dont on conſidére l'aire, on aura un Triangle qui aura une même aire que le Triangle donné A, B, C, & c'eſt ce qui étoit requis. En voici l'opération. Prop. 1.

L'aire du ſecond Triangle trouvé, qui eſt en la premiere Table, eſt 2 A B C² D²; qu'elle ſoit diviſée par ½ A B, aire du Triangle donné, le quotient ſera 4 C² D² qui eſt un quarré; ſa racine eſt 2 C D, par laquelle on diviſera le ſecond Triangle D², 4 A B C², E, & on aura le Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, dont l'aire eſt ½ A B, comme au Triangle donné.

L'aire du quatriéme Triangle eſt 8 A B C² D² E² F², qui étant diviſée par ½ A B, donne 16 C² D² E² F² quarré de 4 C D E F, qui diviſant le quatriéme Triangle, il en viendra le Triangle $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, dont l'aire eſt auſſi ½ A B.

L'aire du ſixiéme Triangle étant diviſée par ½ A B donne 64 C² D² E² F² G² H², quarré de 8 C D E F G H, qui diviſant le ſixiéme Triangle, donne le Triangle $\frac{H}{8CDEFG}$, $\frac{8ABCDEFG}{H}$, $\frac{I}{8CDEFGH}$, dont l'aire eſt ½ A B, comme au Triangle donné.

Enfin l'aire du huitiéme Triangle étant diviſé par ½ AB, donne 256 C² D² E² F² G² H² I² K², dont la racine eſt 16 C D E F G H I K, qui diviſant le huitiéme Triangle donne le Triangle $\frac{K}{16CDEFGHI}$, $\frac{16ABCDEFGHI}{K}$, $\frac{L}{16CDEFGHIK}$ dont l'aire eſt auſſi ½ A B.

On a donc cinq Triangles, compris le Triangle donné, dont l'aire eſt ½ A B, qui eſt celle qui avoit été propoſée. Voici les cinq Triangles en la Table ſuivante.

SECONDE TABLE

Qui ne contient que des Triangles dont l'aire eſt auſſi égale à celle du Triangle donné, qui y eſt auſſi compris.

1er Triangle,	A,	B,	C.
2e	D / 2C,	2ABC / D,	E / 2CD,
3e	F / 4CDE,	4ABCDE / F,	G / 4CDEF.
4e	H / 8CDEFG,	8ABCDEFG / H,	I / 8CDEFGH.
5e	K / 16CDEFGHI,	16ABCDEFGHI / K	L / 16CDEFGHIK.

Aire commune $\frac{1}{2}$AB.

Et pour réduire ces caractéres en nombres, ſi on prend le Triangle 3, 4, 5, pour A, B, C, le ſecond Triangle de cette ſeconde Table ſera $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$, & les deux moindres côtez du troiſiéme Triangle de la même ſeconde Table ſeront $\frac{1437599}{168140}$, & $\frac{2017680}{1437599}$.

Cela ſera facile à calculer, ſi on prend la valeur de chaque caractére, & par ce moyen on trouvera que le ſecond Triangle de la premiere Table, ſçavoir D^2, 4 ABC^2, E, eſt 49, 1200, 1201, dont l'aire 29400 étant diviſée par 6, ſçavoir par l'aire du Triangle donné, 3, 4, 5, on

on aura 4900, quarré de 70, qui eſt le nombre par lequel doit être diviſé le Triangle 49, 1200, 1201, & le quotient ſera le Triangle $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$, qui eſt la valeur du Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, & l'aire de ce Triangle eſt 6.

De même on aura la valeur du troiſiéme Triangle de la ſeconde Table, ſçavoir de $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, correſpondant au quatriéme de la premiere Table qui eſt F^2, $16\,A\,B\,C^2\,D^2\,E^2$, G, dont les côtez vaillent 206669088 4801, 339252715200, 209435040 4801, ſon aire eſt $8\,A\,B\,C^2\,D^2\,E^2\,F^2$, qui vaut 350565247073914830837600, qui étant diviſée par 6, qui eſt l'aire du Triangle donné, on aura 584275411789858051 39600, quarré de 241717895860, qui eſt le diviſeur; & ce nombre étant pris ſuivant ce qui ſe pratique ordinairement en Algebre, pour le dénominateur commun des trois côtez du Triangle 206669088 &c. qui eſt le quatriéme de la premiere Table, on aura $\frac{206669088\,4801.339252715200.209435040\,4801}{241717895860}$, qui eſt la valeur du troiſiéme Triangle de la ſeconde Table marquée par les caractéres $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, & diviſant ce Triangle, ſçavoir le quatriéme de la premiere Table par 241717895860, on trouvera la valeur en fractions, qui réduites aux moindres termes, donnent le Triangle $\frac{1437599}{168140}$, $\frac{2017680}{1437599}$, $\frac{209435040\,4801}{241717895860}$.

On pourroit trouver quelque difficulté à réduire ces fractions, parce que le nombre par lequel le Triangle doit être diviſé, ne meſure aucun des côtez du Triangle, encore que ce diviſeur ait une commune meſure avec chacun des deux moindres côtez du même Triangle, quoique ce ne ſoit pas la même en chacun d'eux; car la meſure commune de ce diviſeur avec le premier côté eſt 1437599; mais la meſure avec le côté pair eſt 168140, & ces deux nombres 1437599 & 168140 ſont premiers entre eux.

On trouvera aiſément ces communes meſures, en

conſidérant que le premier côté du Triangle, ſçavoir 20666908848o1 eſt F^2, dont la racine eſt 1437599. Donc pour mettre aux moindres termes la fraction $\frac{20666908848o1}{241717895860}$, qui eſt le premier côté du quatriéme Triangle de la premiere Table, diviſé par 241717895860, qui eſt le diviſeur commun de ce Triangle, on diviſera le numérateur & le dénominateur de cette fraction par 1437599, racine de ſon numérateur, & on aura $\frac{1437599}{168140}$ pour le premier côté réduit aux moindres termes; & diviſant le côté pair $\frac{339252715200}{241717895860}$ du même quatriéme Triangle de la premiere Table, diviſé par le diviſeur commun 241717895860, par 168140, qui eſt le dénominateur de la fraction $\frac{1437599}{168140}$, qui exprime le premier côté, on aura $\frac{2017680}{1437599}$ pour le côté pair du même Triangle réduit à ſes moindres termes.

Pour ce qui eſt de l'hypotenuſe, elle n'a point de commune meſure avec le nombre par lequel on doit diviſer le Triangle.

Or pour plus grande facilité, on reprend ici la premiere Table, & on y exprime la valeur de chaque côté des Triangles, par les nombres qui ſont au-deſſus, & même la valeur de chaque petit caractére par un nombre qu'on met au-deſſous, comme on le voit en la Table ſuivante.

TROISIE'ME TABLE.

	3	4	5
Triangle donné	A,	B,	C.
	7,	24,	25,
1er Triangle trouvé	D,	2AB,	C^2,
	$a^2=b^2$	3, 4,	
	9, 16.		

	49,	1200,	1201,	29400,
2e	D^2,	$4ABC^2$,	E,	aire $2ABC^2D^2$,
		3,4,25,	$4a^2b^2+c^4$,	3,4,25,49.
			9,16,625.	

	1437599,	117600,	1442401,
3e	F	$8ABC^2D^2$,	E^2,
	$d^4=16a^2b^2c^4$,	3,4,25,49,	
	2401, 9,16,625,		
	1440000.		

20666908848 01, 3392527152 00, 2094350404 801,
4e F^2, $16ABC^2D^2E^2$, G,
3,4,25,49,1442401, $64a^2b^2c^4d^4+e^4$,
9,16,625,240,1208052064 4801,
13829760000

aire 3505652470739148308376 00,
$8ABC^2D^2E^2F^2$
3,4,25,49,1442401, 20666908848 01.

On a obmis les autres Triangles, parce que ceux-ci suffisent pour faire voir la forme du calcul.

Le nombre 1440000, qu'on a mis au-dessous de $16a^2b^2c^4$, est le produit de ces quatre nombres, c'est-à-dire, de 16, 9, 16, 625; duquel produit si on ôte d^4, ou 2401, il reste 1437599 pour la valeur du caractére E. On a fait de même à l'égard du dernier côté G, car le nombre 13829760000 est le produit des cinq nombres 64, 9, 16, 625, 2401, lequel ajoûté à e^4, ou 1208052064801, fait la valeur de G, sçavoir 2094350404801.

La maniere de ce calcul sera facile à ceux qui feront ré-

flexion ſur les deux Conſtructions de ce Triangle : car puis qu'on prend les deux moindres côtez du Triangle donné pour les générateurs du premier Triangle qu'il faut trouver, le premier côté de ce premier Triangle ſera 7 (ſuppoſant que le Triangle donné ſoit 3, 4, 5,) ſçavoir la difference de 9 & de 16, quarrez des côtez 3 & 4, & l'hypotenuſe du même Triangle ſera 25, puiſque c'eſt le quarré de l'hyporenuſe du Triangle donné. De même au ſecond Triangle 49, 1200, 1201, on voit par la ſeconde Conſtruction qu'il faut prendre l'hypotenuſe & le côté pair du premier Triangle trouvé pour les générateurs du ſecond, & ainſi que le premier côté de ce ſecond Triangle eſt toûjours le quarré du premier côté du premier Triangle ; & parce que D, qui eſt ce côté, eſt 7, D^2 ſera 49.

Pour ce qui eſt de l'hypotenuſe E, comme elle eſt la ſomme des quarrez de C (25) & de 2 A B (24) leſquels quarrez ſont 625 & 576, ce ſera 1201.

De même, on trouvera que le côté pair du même Triangle, ſçavoir $4 A B C^2$ eſt 1200, puiſqu'il eſt le double du produit de 24 par 25, côtez du premier Triangle.

On trouvera en la même ſorte les côtez du troiſiéme
2. Conſtruction. Triangle F, $8 ABC^2 D^2, E^2$: car les nombres générateurs de ce Triangle étant D^2 (49) & $4 A B C^2$ (1200) ſçavoir les deux moindres côtez du ſecond Triangle, la difference des quarrez de ces deux nombres 49 & 1200, qui ſont 2401, & 1440000, eſt le premier côté F, dont la valeur eſt 1437599, & l'hypotenuſe E^2 étant la ſomme des mêmes quarrez, ſera 1442401, qui eſt auſſi le quarré de E (1201) hypotenuſe du Triangle précedent, ſçavoir du deuxiéme.

Le côté pair $8 A B C^2 D^2$, étant le double du produit de D^2 (49) par $4 A B C^2$ (1200) ſera 117600.

Enfin, pour avoir le quatriéme Triangle, on prendra
3. Conſtruction. pour générateurs les nombres 117600, & 1442401, ſçavoir le côté pair, & l'hypotenuſe du troiſiéme Triangle,

les quarrez de ces nombres ſont 1382976 0000, & 2080520644801, dont la ſomme eſt l'hypotenuſe G (2094350404801); & la difference des mêmes quarrez eſt le premier côté 2066690884801, qui eſt auſſi le quarré de 1437599, premier côté du Triangle précedent, ſçavoir F^2, & le côté pair eſt 3392527 15200, ſçavoir le double du produit des deux nombres générateurs 117600, & 1442401.

Les aires ſe trouvent par la voye ordinaire.

PROPOSITION III.

PROBLEME II.

Trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres entiers qui ayent une même aire.

ON demande, par exemple, cinq Triangles en nombres entiers, chacun deſquels ait un même nombre pour ſon aire.

CONSTRUCTION.

Soit pris un Triangle rectangle quelconque A, B, C; & ſoient faits des Triangles en la multitude requiſe, dont l'aire ſoit multiple par un quarré de l'aire de ce Triangle, par la maniere dont on s'eſt ſervi pour faire ceux de la premiere Table ci-devant. Or on n'a beſoin d'en faire qu'un moins de ce qui eſt requis, à cauſe de celui dont on ſe ſert pour faire les autres: ainſi, pour avoir cinq Triangles qui ayent une même aire, il ſuffira d'en faire quatre, parce que le Triangle donné fait le cinquiéme.

SOLUTION.

Soient faits par la méthode précedente quatre Triangles, dont l'aire ſoit multiple par un quarré de celle du Triangle qu'on aura choiſi pour faire les autres, comme ceux de la premiere Table; on en fera comme s'enſuit

cinq, dont chacun aura pour ſon aire celle du plus grand Triangle. On diviſera la plus grande aire de tous ces Triangles, qui eſt celle du dernier, par l'aire de chacun des quatre autres, y compris le Triangle qui a ſervi à faire tous les autres ; & on aura quatre quotiens, chacun deſquels ſera un nombre quarré, par la concluſion de la démonſtration de la Propoſition précedente : on prendra la racine de chacun de ces quarrez, & chacune de ces racines eſt le nombre par lequel on doit multiplier le Triangle, dont eſt venu le quarré de cette racine par la diviſion qu'on a faite.

La Table ſuivante contient les cinq Triangles, dont l'aire eſt multiple de $\frac{1}{2}$ A B (6) par un quarré, y compris le premier, A, B, C, dont l'aire eſt $\frac{1}{2}$ A B.

QUATRIE'ME TABLE.

1er Tr.	A, B, C,	aire $\frac{1}{2}$ A B.
2e	D^2, 4 ABC^2, E,	aire 2 ABC^2D^2.
3e	F^2, 16 $ABC^2D^2E^2$, G,	aire 8 $ABC^2D^2E^2F^2$.
4e	H^2, 64 $ABC^2D^2E^2F^2G^2$, I,	aire 32 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$.
5e	K^2, 256 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$, L,	aire 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$.

Et ces Triangles ſont le deuxiéme, le quatriéme, le ſixiéme, & le huitiéme de la premiere Table, avec le Triangle donné ; & de ces quatre Triangles on en fera comme s'enſuit quatre autres, dont chacun aura pour ſon aire celle du dernier & plus grand de ces Triangles.

Pour faire qu'un multiple du Triangle A, B, C, ait la même aire que le cinquiéme & dernier de la Table précedente, ſçavoir de la quatriéme, laquelle aire eſt 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, on diviſera cette aire par $\frac{1}{2}$ AB, qui eſt l'aire du Triangle donné A, B, C ; le quotient eſt 256 $C^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, qui eſt un quarré ; ſa racine eſt 16 CDEFGHIK, par laquelle multipliant le
P. Triangle. Triangle A, B, C, on aura le Triangle 16 ACDEFGHIK, 16 BCDEFGHIK, 16 C^2DEFGHIK, dont l'aire eſt 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$ égale à celle

du cinquiéme & dernier Triangle de la quatriéme Table.

Cette même aire du cinquiéme Triangle de la quatriéme Table étant diviſée par 2 A B C²D², qui eſt l'aire du deuxiéme Triangle de la quatriéme Table, donne 64 E² F² G² H² I² K², dont la racine eſt 8 E F G H I K, par laquelle multipliant le deuxiéme Triangle D², 4 ABC², E, on aura le Triangle 8 D²EFGHIK, 32 ABC²EFGHIK, 8 E² F G H I K, qui eſt le deuxiéme Triangle, dont l'aire eſt la même que celle du cinquiéme & dernier Triangle. 2. *Triangle.*

Cette même aire du cinquiéme Triangle étant diviſée par 8 ABC²D²E²F², qui eſt l'aire du troiſiéme Triangle de la quatriéme Table, donne 16 G²H²I²K², dont la racine eſt 4 G H I K, par laquelle multipliant ce troiſiéme Triangle F², 16 A B C²D²E², G, on aura le troiſiéme Triangle, qui a la même aire que le cinquiéme, ce Triangle eſt 4 F² G H I K, 64 ABC²D²E² G H I K, 4G²HIK. 3. *Triangle.*

Enfin, la même aire du cinquiéme Triangle étant diviſée par 32 ABC²D²E²F²G²H², qui eſt l'aire du quatriéme Triangle de la quatriéme Table, ſçavoir du Triangle H², 64 ABC²D²E²F²G², I, on aura 4 I²K², dont la racine eſt 2 I K, par laquelle multipliant ce quatriéme Triangle, on aura le quatriéme Triangle requis, 2H²IK, 128 ABC²D²E²F²G²IK, 2 I²K, dont l'aire eſt la même qu'aux précedens. 4. *Triangle.*

Cette aire eſt 128 ABC²D²E²F²G²H²I²K², qui eſt la même que celle du cinquiéme & dernier Triangle de la quatriéme Table. Ce dernier Triangle eſt K², 256 ABC² D²E²F²G²H²I², L, qui eſt le cinquiéme de ceux qui ont une même aire. 5. *Triangle.*

Voici quelques Triangles en nombres entiers, qui ont une même aire. On n'a calculé que les trois premiers, pour éviter le calcul de ſi grands nombres, qui n'apporteroit aucune utilité; & l'aire commune de ces Triangles eſt celle du troiſiéme de la quatriéme Table, & non pas celle du cinquiéme Triangle de la même quatriéme Table.

1er Triangle	72515 3687580,	966871583440,	1208589479300.
2e	169202527102,	4143735357600,	4147188470398.
3e	2066690884801,	339252715200,	2094350404801.

Aire commune 350565247073914830837600.

Pour faire qu'un Triangle multiple de 3, 4, 5, ait la même aire, que celle du troiſiéme, ſçavoir 350565, &c. je diviſe cette aire par 6, qui eſt celle de 3, 4, 5; le quotient eſt 58427541178985805139600, quarré de 241717895860, par lequel nombre on multiplie le Triangle 3, 4, 5, pour avoir le premier Triangle 72515 &c. qui a la même aire que le troiſiéme Triangle, ſçavoir 35056, &c.

Cette même aire du troiſiéme Triangle étant diviſée par 29400, aire du deuxiéme Triangle $D^2, 4ABC^2, E$, dont la valeur eſt 49, 1200, 1201, donne 1192398799571138880 4, qui eſt un quarré, dont la racine eſt 3453112798, par laquelle multipliant le deuxiéme Triangle 49, 1200, 1201, on aura le deuxiéme Triangle ci-deſſus 169202, &c. qui a la même aire que le troiſiéme 2066690, &c. dont le calcul eſt ci-devant à la fin de la deuxiéme Propoſition de cette ſeconde Partie.

REMARQUE.

Cette méthode eſt bien facile : toutefois elle a une incommodité, qui eſt qu'on paſſe incontinent à de fort grands nombres, comme on le voit en l'exemple précedent, auquel, quoiqu'on ait choiſi le moindre de tous les Triangles, ſçavoir 3, 4, 5, pour fondement du calcul; néanmoins dès qu'on vient à trois Triangles qui ont une même aire, ils ont déja leurs côtez de douze ou treize chiffres, & l'aire en a juſques à vingt-quatre; & ſi on avoit beſoin d'une plus grande multitude de Triangles, qu'on voulût exprimer par des nombres, & non point par des caractéres qui ſignifiaſſent ces nombres, leur grandeur en

en rendroit le calcul ſi laborieux & ſi ennuyeux, que cela feroit perdre l'envie de s'y appliquer.

Or pour éviter ce travail, on peut ſe ſervir d'une autre méthode, qui donne la même quantité de Triangles qui ont une même aire, mais qui ſont beaucoup moindres que ceux qu'on trouveroit par la méthode ci-deſſus. Il eſt vrai qu'il faut ſe ſervir de quelque adreſſe pour les trouver, parce que comme leur recherche ne dépend pas d'une ſuite néceſſaire, qui ſoit connuë, il les faut découvrir par induction, en examinant quelquefois par le calcul ſi quelques-uns des nombres qu'on trouve ſont les aires d'un ou de pluſieurs Triangles. Voici quelques régles de cette méthode, & quelques exemples de Triangles ayant une même aire, qui ont été trouvez par ſon moyen.

I. REGLE.

Si l'aire d'un Triangle primitif eſt meſurée par un quarré, & qu'étant diviſée par ce quarré, le quotient ſoit l'aire d'un Triangle primitif, on pourra par ce quotient faire deux Triangles rectangles qui auront une même aire : ainſi 1320, aire du Triangle 48, 55, 73, étant diviſé par 4, donne 330, aire du Triangle 11, 60, 61, & ce nombre 330, étant multiplié par 2, racine de 4, donne le Triangle 22, 120, 122, dont l'aire eſt auſſi 1320.

II. REGLE

Si on multiplie par un quarré l'aire d'un Triangle, & que le produit ſoit l'aire d'un Triangle primitif, on en fera deux Triangles qui auront une même aire ; comme ſi 546, aire du Triangle 13, 84, 85, eſt multiplié par 9, on aura 4914, qui eſt l'aire du Triangle primitif 27, 364, 365 ; & multipliant le premier Triangle 13, 84, 85, par 3 racine de 9, on aura le Triangle 39, 252, 255, dont l'aire eſt auſſi 4914.

TABLE DE PLUSIEURS COUPLES de Triangles qui ont une même aire.

210 eſt l'aire des deux Triangles primitifs 20, 21, 29, & 12, 35, 37.

2730 eſt l'aire des deux primitifs 28, 195, 197, & 60, 91, 109.

7980, des deux primitifs 40, 399, 401, & 95, 168, 193.

71610, des deux 132, 1085, 1093, & 341, 420, 541.

85470, des deux 140, 1221, 1229, & 259, 660, 709.

106260, des deux 280, 759, 809, & 385, 552, 673.

114114, des deux 77, 2964, 2965, & 364, 627, 725.

2042040, des deux primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201.

Par des opérations à peu près ſemblables, on trouvera trois Triangles qui auront une même aire en nombres entiers, par le moyen de deux qu'on aura déja trouvez : car en multipliant par un quarré une aire qui eſt commune à deux Triangles primitifs, s'il ſe rencontre que le produit ſoit l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une même aire, ou bien ſi on multiplie l'aire d'un primitif, & que le produit ſoit l'aire de deux Triangles.

EXEMPLE.

210, aire des deux Triangles 20, 21, 29; 12, 35, 37, multiplié par quatre, donne 840, aire du primitif 15, 112, 113 : & multipliant ces deux mêmes Triangles par 2, racine de 4, on aura 40, 42, 58, & 24, 70, 74, dont l'aire eſt auſſi 840.

Que ſi l'aire d'un Triangle primitif eſt diviſée par un quarré, & que le quotient ſoit l'aire d'un Triangle primitif, & que cette aire étant multipliée par un quarré, le produit ſoit auſſi l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une même aire ; & s'il ſe

rencontre que l'une de ces aires ſerve à deux Triangles primitifs, la plus grande ſervira à quatre Triangles.

TABLE DE PLUSIEURS TERNAIRES de Triangles qui ont une même aire.

56,	390,	394,		80,	798,	802,	
105,	208,	233,	aire 10920.	105,	608,	617,	aire 31920.
120,	182,	218,		190,	336,	386,	

385,	1488,	1537,		855,	2640,	2775,	
264,	2170,	2186,	aire 286440	792,	2850,	2958,	aire 1128600
682,	840,	1082,		1485,	1520,	2125,	

455,	4128,	4153,		462,	2520,	2562,	
624,	3010,	3074,	aire 939120	490,	2376,	2426,	aire 582120
1118,	1680,	2018,		1008,	1155,	1533,	

1380,	19019,	19069,		528,	7735,	7753,	
3059,	8580,	9109,	aire 13123110	1001,	4080,	4201,	aire 2042040
4485,	5852,	7373,		1430,	2856,	3194,	

Ces trois, dont l'aire eſt 13123110, ſont les moindres entre les primitifs qui ayent une même aire.

Pour trouver plus de trois Triangles qui ayent une même aire comme 4, 5, 6, &c. on peut ſe ſervir de quelques regles concernant les parties aliquotes, les combinaiſons, &c. par le moyen deſquelles on pourra connoître ſi un nombre eſt l'aire de quelque Triangle rectangle : mais comme les opérations en ſont longues & difficiles, on s'eſt reſtraint à ne donner ici que quelques uns de ces Triangles, qu'on a trouvez en ſe ſervant de ces regles.

TABLE DE TROIS QUATERNAIRES de Triangles qui ont une même aire.

111,	6160,	6161,	
231,	2960,	2969,	aire 341880
280,	2442,	2458,	
518,	1320,	1418,	

Ces quatre Triangles ſont les moindres de tous ceux qui ont une même aire en nombre entier.

3289,	31920,	32089,	
2760,	38038,	38138,	aire 52492440
6118,	17160,	18218,	
8970,	11704,	14746,	

935,	17472,	17497,	
1056,	15470,	15506,	aire 8168160
2002,	8160,	8402,	
2860,	5712,	6388,	

Pour faire ces quatre derniers Triangles on a pris 2042040, qui eſt l'aire des deux Triangles primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201, laquelle diviſée par quatre, donne 510510, aire du primitif 715, 1428, 1597, qui étant multipliée par 2, racine de 4, donne 1430, 2856, 3194, qui a pour ſon aire 2042040, quadruple de 510510; & multipliant par 4 cette aire 2042040, on a 8168160, aire du primitif 935, 17472, 17497; & multipliant par 2 les trois Triangles cy-deſſus, qui ont 2042040 pour leur aire, on aura les quatre cy-deſſus, qui ont 8168160 pour leur aire.

TABLE DE QUATRE QUINAIRES de Triangles qui ont une même aire.

2805,	52416,	52491,	
3168,	46410,	46518,	
6006,	24480,	25206,	aire 73513440
5236,	28080,	28564,	
8580,	17136,	19164,	

Si cette aire ſervoit à quelque Triangle primitif, elle ſeroit l'aire de ſix Triangles.

On ne met point les hypotenuſes aux quinze Triangles ſuivans.

67234957,	56510961360,	
713346495,	5326320496,	
1141354392,	3328950310,	aire 1899756028534130760.
1902257320,	1997370186,	
1389419029,	2734604880,	

4680062014,	39335907307 20,	
49654316490,	3707521297 92,	
7944690638 4,	2317201436 20,	aire 92047242787325874350 40.
1324115106 40,	1390320861 72,	
1804399778 29,	1020253315 20,	

3253383668734,	6403193472480,	
4454216308720,	4676927124156,	
2671529785232,	7794878540260,	aire 10416022535555291732720160;
1670331115770,	1247180566 4416,	
606985516671 7,	343204977696 0,	

EXEMPLE DE SIX TRIANGLES qui ont une même aire.

38682731821247 26,	761339703877872 0,	85397512775039 26,
31776379146408 48,	926811058436914 0,	97977169034759 48,
72170577932265 13,	408070718480544 0,	82908440052201 13,
19860236966505 30,	148298769349906 24,	14961378514767 326,
1871884403739 58,	15733182845660784 0,	15733193981201555 8,
52960631910680 80,	55608663506214 84,	76792916270487 16,

Aire commune 14725349794987762583672877315360.

Tous ces Triangles ſont premiers entr'eux, c'eſt-à-dire, qu'ils ne ſont point multiples de quatre, de cinq, ou de ſix autres Triangles ; & ſi on les multiplie par quelque nombre que ce ſoit, on aura d'autres Triangles qui auront auſſi une même aire.

DES
QUARREZ
OU
TABLES MAGIQUES.

Digitized by Google

DES QUARREZ OU TABLES MAGIQUES.

ON appelle Quarré Magique celui qui étant diviſé par cellules en quantité répréſentée par un nombre quarré, & les cellules étant remplies de nombres conſécutifs, ou qui ſoient en même progreſſion arithmétique, contient pareille ſomme en chacune de ſes lignes, de quelque façon qu'on les puiſſe prendre. Exemple :

Le quarré A, B, C, D, 16, A est diviſé en 16 cellules, & ces cellules ſont remplies des nombres conſécutifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. juſqu'à 16 : & ces nombres ſont diſpoſez d'un tel ordre dans les cellules, que les nombres de chaque ligne étant aſſemblez, font une ſomme égale ; ſoit qu'on prenne les lignes en long, comme 1, 15, 14, 4, | 12, 6, 7, 9, | 8, 10, 11, 5, | & 13, 3, 2, 16, | ou qu'on les prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13, | 15, 6, 10, 3, | 14, 7, 11, 2, | 4, 9, 5, 16, | ou enfin ſi on conſidere les deux diagonales ou lignes tranſverſales, 1, 6, 11, 16, & 4, 7, 10, 13, la & ſomme de chacune de ces lignes eſt 34.

B

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

C D

La ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne ne

ſe peut pas prendre à diſcrétion ; mais elle eſt neceſſaire à chaque figure : & voici le moyen de ſçavoir quelle elle eſt.

La ſomme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique étant multipliée par la moitié du côté du quarré, donne la ſomme de chaque ligne. Ainſi au quarré qui a 16 cellules, ſi le moindre nombre eſt 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur ſomme 17 par 2, qui eſt la moitié de 4, côté de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que ſi le quarré magique eſt impair, on multipliera la moitié de la ſomme des deux nombres extrêmes par le côté du quarré. Ainſi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, ſi le moindre des nombres eſt 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65; qui ſe trouve ajoutant les termes extrêmes 25 & 1; & prenant la moitié de 26, qui eſt leur ſomme, & on aura 13, qui étant multiplié par 5, côté du quarré 25, donnera 65.

Si les nombres dont on ſe ſert pour remplir les cellules ne commençoient pas par l'unité, ou qu'ils euſſent autre difference entre eux que l'unité; on ne laiſſeroit pas de ſe ſervir des regles cy-deſſus pour trouver la ſomme des nombres de chaque ligne. Exemple: Que les nombres dont on veut remplir les cellules du quarré de 4, qui eſt 16, ſoient 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31; 33. J'aſſemble les extrêmes 3, & 33, pour avoir 36, qui multiplié par 2, moitié de 4, côté du quarré 16, donnera 72 pour la ſomme des nombres de chaque ligne.

Si les extrêmes des nombres qu'on employe au quarré 16, étoient 1, & 31, je prendrois de même la ſomme qui eſt 32; qui étant multipliée par le même 2, donneroit 64 pour la ſomme des nombres de chaque ligne.

De même ſi pour remplir les cellules du quarré 9, qui a trois de côté, on ſe ſervoit de 4, 7, 10, 13, 16, 19,

22, 25, 28, je prendrois la ſomme des extrêmes 4 & 28, qui eſt 32, (laquelle ſomme eſt toujours un nombre pair, lors qu'il s'agit des quarrez impairs) la moitié de 32 eſt 16, qui multiplié par le côté 3, donne 48 pour la ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne.

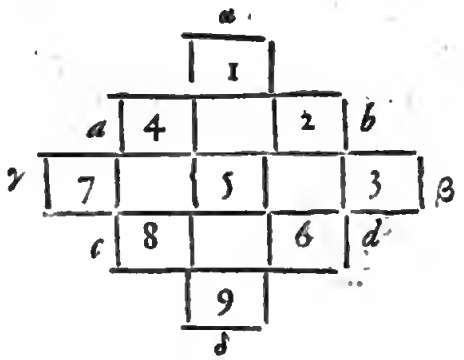
Il faut maintenant voir la maniere dont on ſe ſert pour diſpoſer les nombres en telle ſorte que chaque ligne faſſe une ſomme égale.

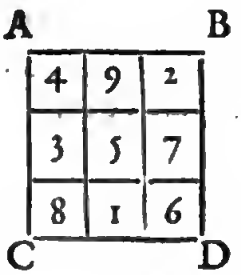
Il y a entr'autres deux méthodes qui ſervent à cet effet. L'une eſt pour les ſeuls impairs, & l'autre peut ſervir tant aux quarrez pairs qu'aux impairs.

On donnera ici premierement celle qui appartient aux ſeuls impairs, puis on parlera de la generale.

Auſquelles méthodes on ſuppoſera toujours pour plus grande facilité, que les nombres dont les cellules doivent être remplies, commencent par l'unité, & qu'elles s'entre-ſuivent avec la difference de la même unité, comme ſont 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Car en ce qui dépend de placer & ranger les nombres dans les cellules, il n'importe pas quel ſoit le moindre nombre, ni quelle difference ils ayent entre eux. Il ſuffit qu'ils ſoient en progreſſion Arithmétique, & qu'ils ſe ſurmontent l'un l'autre d'un excès toujours égal, comme 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c. ou 4, 9, 14, 19, 24, 29, &c.

Pour remplir les cellules d'un quarré impair, par exem-





ple du quarré A B C D qui a 9 cellules, je décris un autre quarré *a b c d* qui a pareillement 9 cellules, comme on voit ici : & ſur chacune des faces du quarré, j'crens une autre cellule vis-à-vis de la cellule qui eſt au milieu de chaque côté : leſquelles cellules ſont marquées α β γ δ.

Cela fait, j'écris les nombres de ſuite, commençant par une des cellules qui ſont hors du quarré & par la plus éloignée du milieu.

On écrira donc 1, 2, 3, dans les cellules α, *b*, β, puis revenant à la cellule *a*, tirant vers *d*, on écrira 4, 5, 6, & enfin aux cellules γ, *c*, δ, on mettra 7, 8, 9.

Ces nombres étant ainſi diſpoſez, je conſidere ceux qui ſe rencontrent dans le quarré *a*, *b*, *c*, *d*, qui ſont 4, 2, 5, 8, 6, leſquels je mets aux mêmes places dans le quarré A, B, C, D, apprêté pour cet effet.

Il reſte donc à remplir les autres places vuides du quarré, ce qui ſe fera mettant le nombre qui eſt en δ, en la cellule qui eſt au-deſſous de α, ſçavoir entre 4, & 2 ; & en échange, le nombre qui eſt en α, en celle qui eſt au-deſſus de δ, entre 8, & 6.

Et ſemblablement on mettra 7, qui eſt en γ, vers β, entre 2, & 6 : & 3, qui eſt en β, on le mettra près de γ, entre 4, & 8, comme on peut voir en la figure. On aura donc la figure complette A B C D qui a 15, pour la ſomme des nombres de chacune de ſes lignes, & diagonales.

Mais parce que le quarré de 3, pour être trop petit ne donnera pas peut-être une entiere connoiſſance de la façon dont on fabrique ces quarrez impairs, on en apportera un plus grand pour l'exemple, ſçavoir celui de 49, qui a 7 de côté.

A

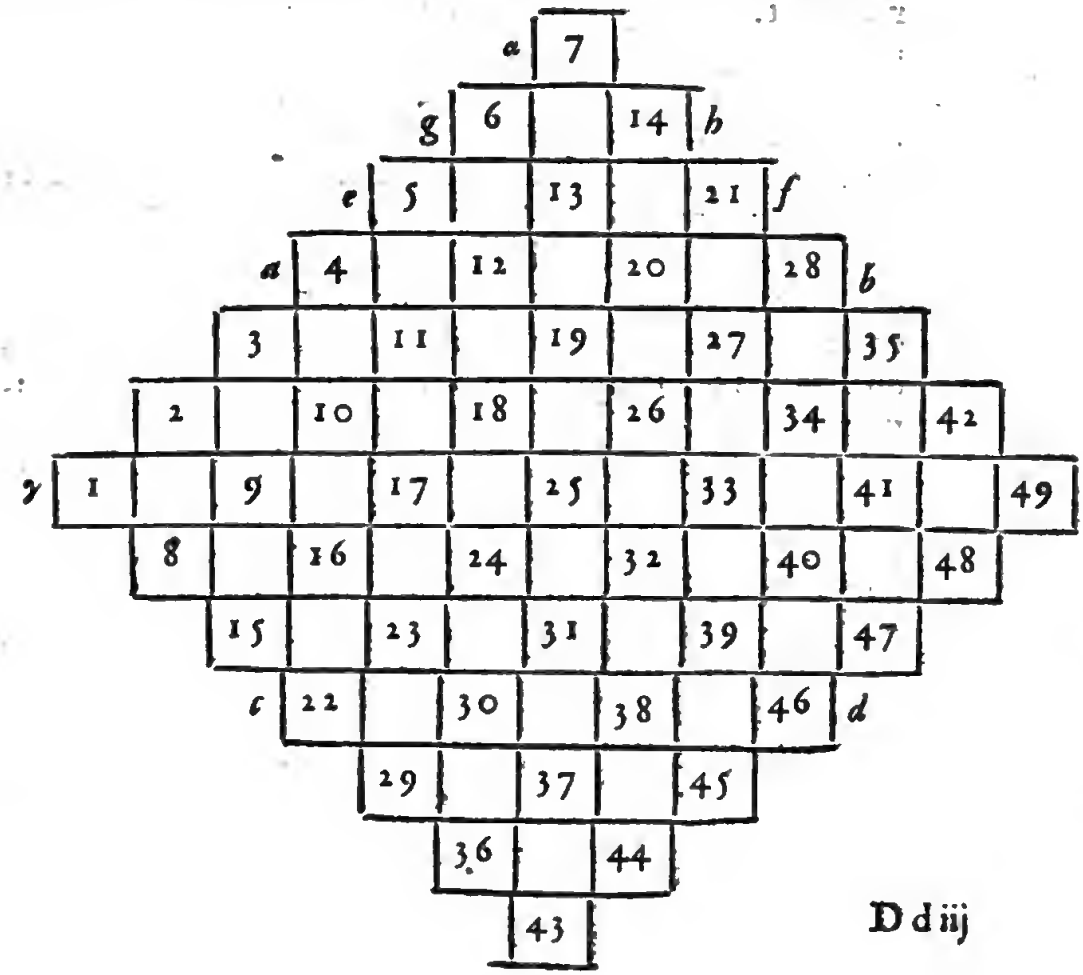
4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

B

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

C

D



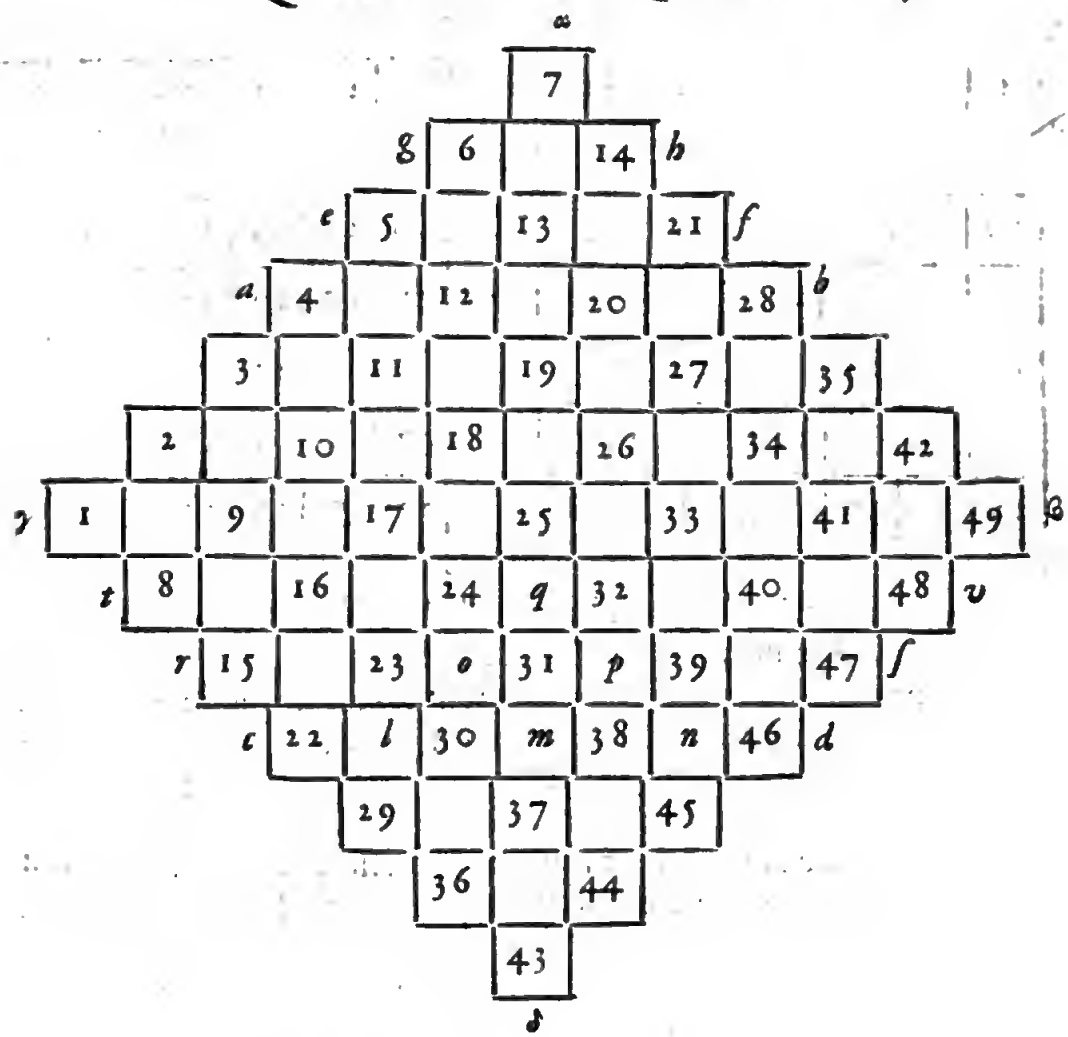
Ayant fait le quarré *a b c d*, qui a ſept cellules à chacun de ſes côtez, j'éleve ſur le côté *a b*, les cinq cellules *e f*, ſçavoir deux moins que celles du quarré ; puis ſur ces cinq je mets les trois marquées *g h* ; puis ſur ces trois j'en poſe une marquée *α* : car leur nombre doit toujours diminuer de deux.

Semblablement ſur chacun des autres côtez, comme ſur *a c*, ſur *c d*, & ſur *d b*, je place cinq cellules, puis trois & une. J'écris après les nombres de ſuite dans ces cellules, commençant par laquelle on voudra des quatre, qui ſont comme la pointe, & qui ſont les plus éloignées du quarré *a b c d*, comme par *γ* ; & de là tournant vers quelque côté qu'on voudra, ainſi qu'on voit en cette figure, (car il n'importe point par où on commence) en laquelle les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, vont de *γ* vers *α*. Puis on revient à la cellule exterieure voiſine de *γ*, & tirant vers le même côté, on écrit les nombres ſuivans 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & les autres nombres enſuite, comme la figure le pourra mieux repreſenter que le diſcours.

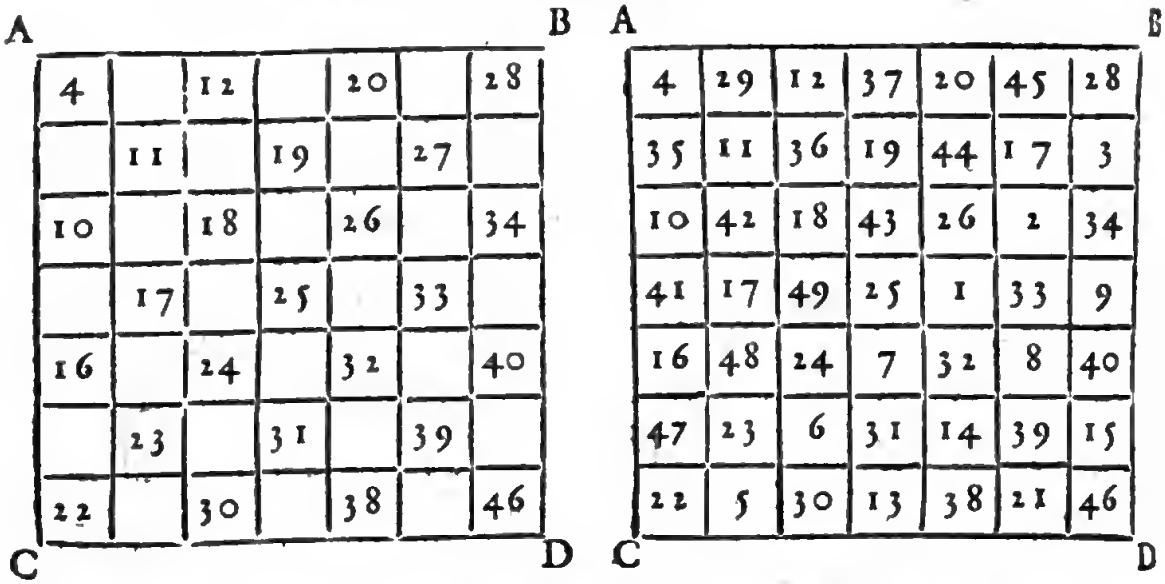
Les nombres étant ainſi placez, je conſidere ceux qui ſe rencontrent dans les cellules du quarré *a b c d*, & les écris en la même diſpoſition & ſituation dans les cellules du quarré A B C D, apprêté pour cet effet, ainſi qu'on peut voir ici.

Cela fait, on remplira les places vuides avec les nombres des cellules qui ſont hors du quarré *a b c d*, en prenant tout ce qui eſt dehors, ſçavoir *e*, *g*, *α*, *h*, *f*, dans leſquelles cellules ſont les nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7 ; & les plaçant, ainſi diſpoſez & tournez comme ils ſont, ſur le côté oppoſé *c d*, ſçavoir les trois cellules de la ligne *e f*, où ſont les nombres 5, 13, 21, ſur les trois cellules vuides du côté *c*, *d*, marquées *l*, *m*, *n*.

Puis on mettra les deux cellules de *g*, *h*, où ſont 6, 14, ſur les deux vuides de *r*, *f*, marquées *o*, *p*, &c.



Enfin on mettra 7, qui eſt en la cellule α, en la cellule vuide, qui eſt au milieu de *t v*, marquée *q*, & ainſi les ſix nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7, ſe trouveront dans le quarré en la même diſpoſition, & tournez du même côté qu'ils étoient hors du quarré. Les autres côtez ſe rempliront de la même ſorte; car on mettra les ſix nombres qui ſont hors du quarré aux cellules *b*, β, *d*, ſur le côté oppoſé *a c*, & ſur les deux côtez prochains, tirant vers β, en ſorte que 49, qui eſt en β, ſoit plus près du β que tous les autres, quand il ſera placé.



De même les nombres de *d*, *δ*, *c*, ſeront placez du côté de *a b*, tournans leur pointe en bas vers *δ*, comme ils ſont hors du quarré; & pareillement les nombres de *a*, *γ*, *c*, ſeront placez en la même façon ſur *b*, *β*, *d*, & on aura le quarré magique parfait, ainſi qu'on peut voir ici.

On pourra uſer d'un autre moyen ſi on a peur de ſe méprendre, en voulant remplir les cellules vuides du quarré avec celles qui ſont hors du quarré, qui ſera comme s'enſuit.

Depuis chaque cellule remplie qui eſt hors du quarré, on comptera en tirant vers le quarré autant de cellules tant pleines que vuides, que le quarré a de cellules à chaque côté, ſçavoir 7 au quarré que nous avons pris pour exemple: ainſi comptant ſept cellules depuis *e* où 5 eſt écrit, ſans l'y comprendre, on rencontrera la cellule marquée *l*: & comptant de même ſept cellules depuis celle où eſt le nombre 13, on rencontrera *m*, & comptant depuis *f*, on trouvera *n*. Il faudra donc remplir les trois cellules *l*, *m*, *n*, des nombres 5, 13, 21. Par la même raiſon le nombre de la cellule *g* viendra en *o*, & celui de *h* en *p*, & enfin celui de *α* en *q*.

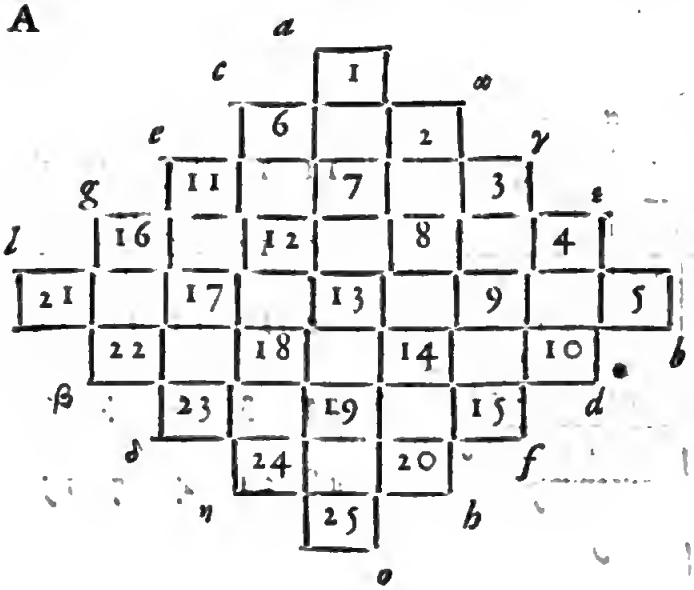
Les

Les autres côtez ſe feront de même, car depuis chacune des cellules remplies de la figure $b\beta d$, qui ſont hors du quarré, comptant ſept cellules vers le quarré, & le côté ac, oppoſé au côté bd, on trouvera une cellule vuide, qu'on remplira du nombre qui eſt dans la cellule depuis laquelle on a compté 7, & on fera le même des cellules qui ſont aux deux autres côtez du quarré.

Variation des quarrez impairs, & particulierement du quarré qui a 5 de côté.

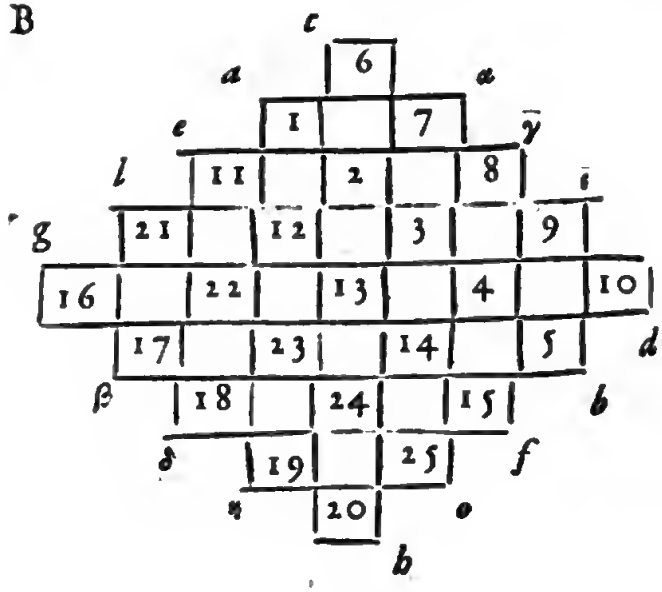
Les Tables des quarrez impairs ſe peuvent varier en diverſes manieres ſelon qu'on diſpoſera les rangs des nombres. Par exemple en la figure de 5, au lieu de ranger les nombres, ainſi qu'on peut voir en A, on les pourra auſſi ranger comme on voit en B, & en C, & les autres, deſquels on peut voir les quarrez achevez, qui ſont placez à côté.

A



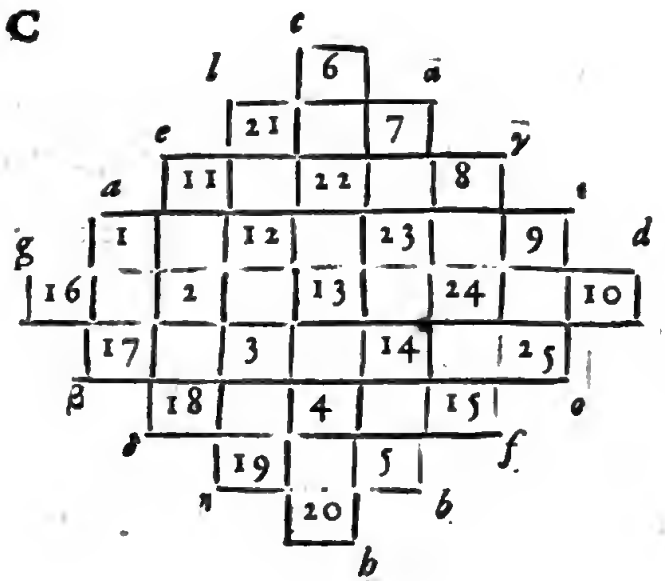
11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

B



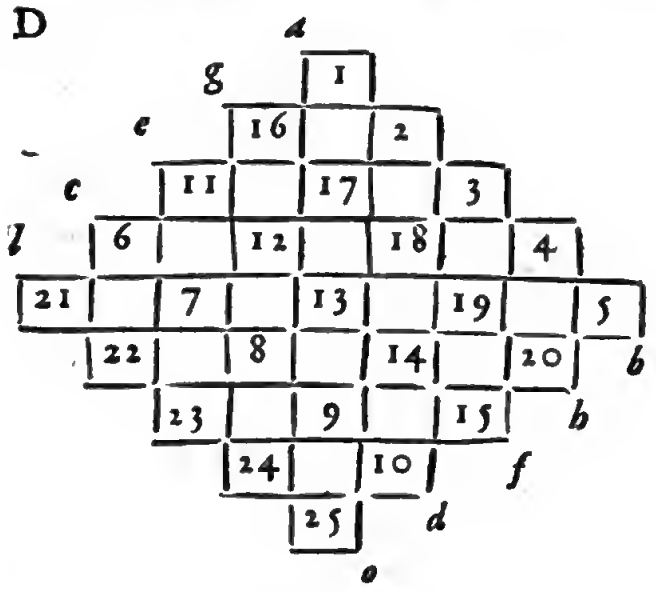
11	19	2	25	8
9	12	20	3	21
22	10	13	16	4
5	23	6	14	17
18	1	24	7	15

C



11	19	22	5	8
9	12	20	23	1
2	10	13	16	24
25	3	6	14	17
18	21	4	7	15

Digitized by Google



11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

Le changement de ces figures eſt facile à comprendre par l'inſpection de celles qui ſont ici repréſentées, auſquelles on voit qu'on peut tranſporter les lignes des nombres ainſi qu'on veut, pourvû qu'on change en même ſorte la ligne correſpondante ou rélative. Or les lignes rélatives ſont celles qui ſont également éloignées de celles du milieu; ainſi la rélative de *a b*, en la figure A, eſt *l o*, & celle de *c d*, eſt *g h*: de même celle de *a l*, eſt *b o*, & celle de *α β*, eſt *ε η*.

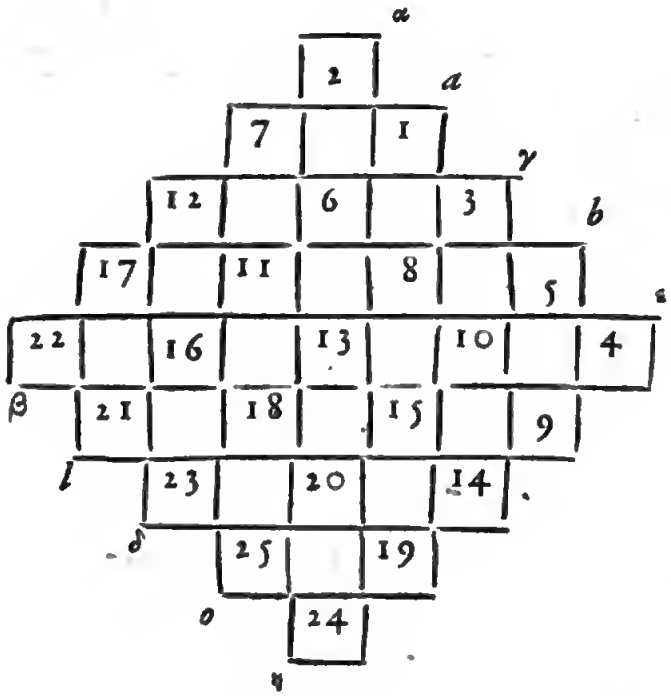
Par exemple, la ligne correſpondante de *a b*, eſt *l o*: & la correſpondante de *c d*, eſt *g h*. Mais *e f* n'a point de correſpondante, & ainſi elle ne peut être ôtée de ſa place.

On voit en la figure B, que la ligne *c d* tient le premier lieu, & par conſéquent ſa rélative *g h* ſera au dernier lieu; & *a b* étant au ſecond lieu, ſa rélative *l o* ſera au quatriéme.

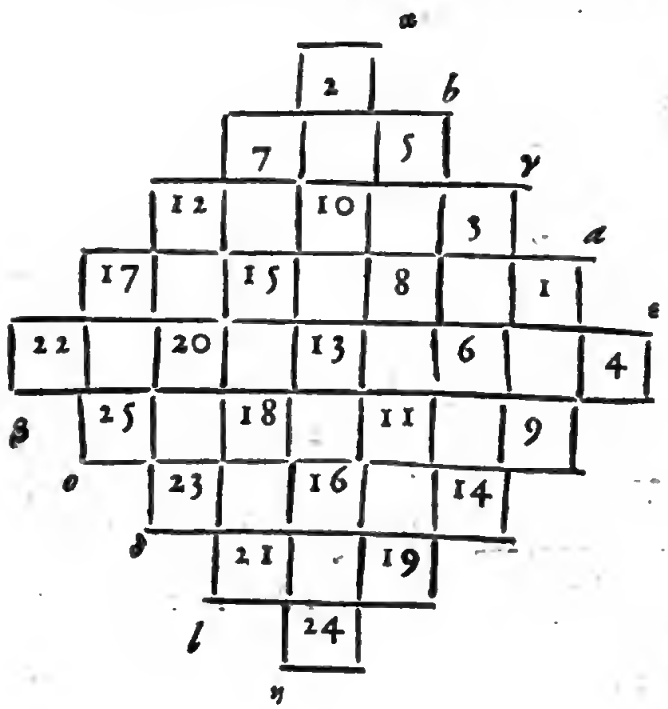
En C, on a tranſpoſé la derniere ligne de A, ſçavoir *l o*, & on l'a miſe au ſecond lieu, & ſa rélative *a b* au quatriéme lieu; le reſte demeurant comme en B.

En D on a placé gh au ſecond lieu, & ſa rélative cd au quatriéme, le reſte demeurant comme en A.

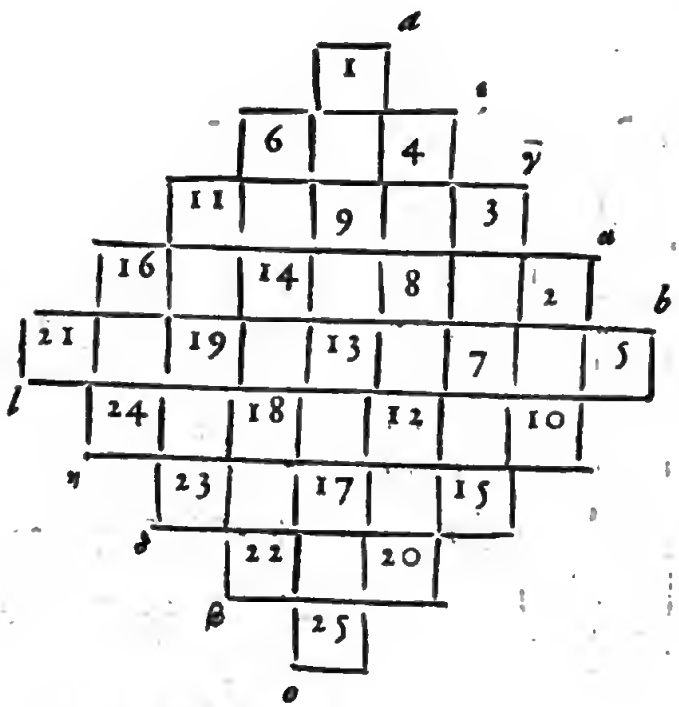
On pourra enſuite tranſporter les lignes $\alpha\beta$, $\varepsilon\eta$, al, bo, & ainſi on auroit les figures ſuivantes par la tranſpoſition des lignes de la figure A ; auſquelles tranſpoſitions on voit comme ci-devant, que la ligne $\gamma\delta$, qui eſt au milieu, ne ſe change point, parce qu'elle n'a point de rélative.



12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

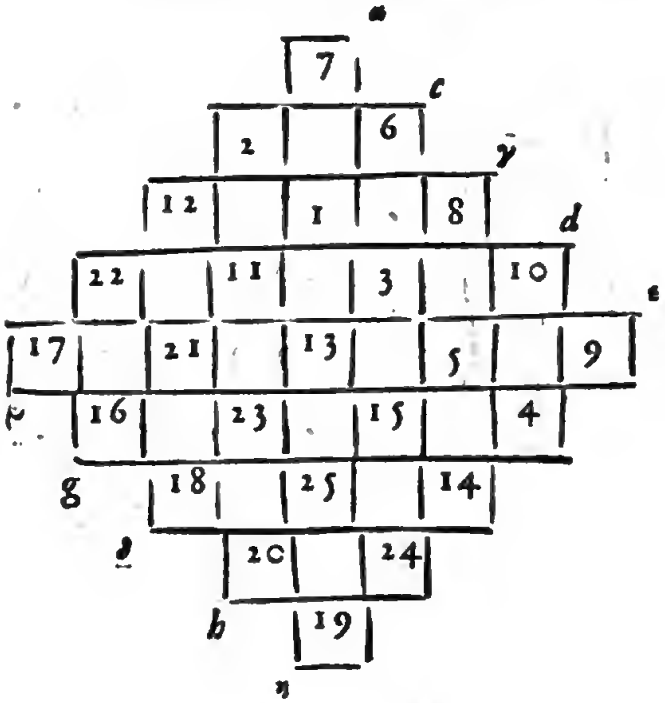


12	21	10	19	3
1	15	24	8	17
20	4	13	22	6
9	18	2	11	25
23	7	16	5	14

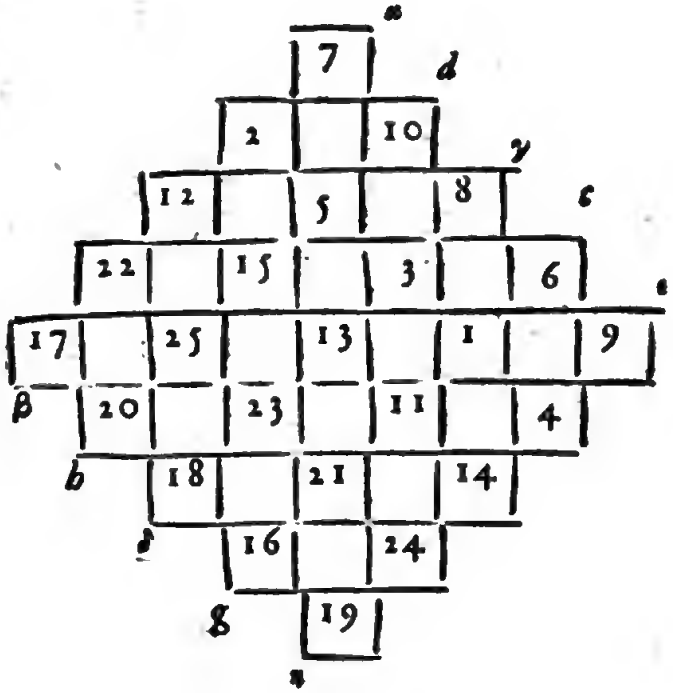


11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

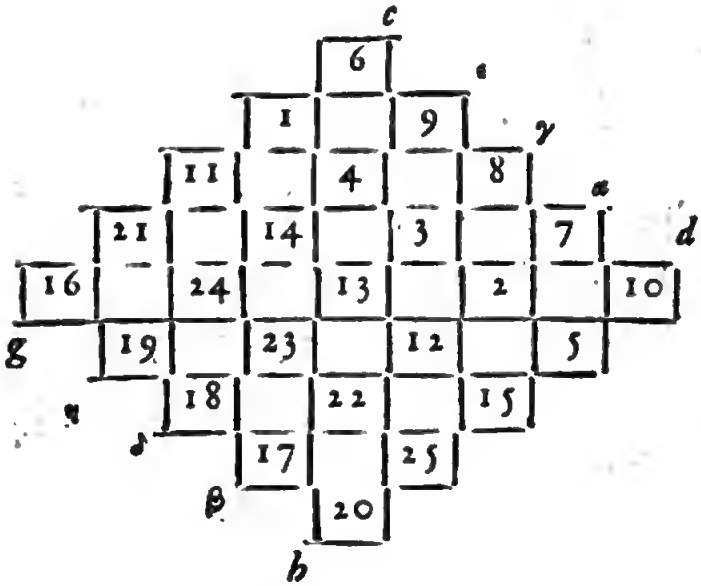
S'enſuivent les tranſpoſitions des lignes *c g*, *α ε*, &c. de la figure B. page 218.



12 20 1 24 8
10 11 19 3 22
21 9 13 17 5
4 23 7 15 16
18 2 25 6 14

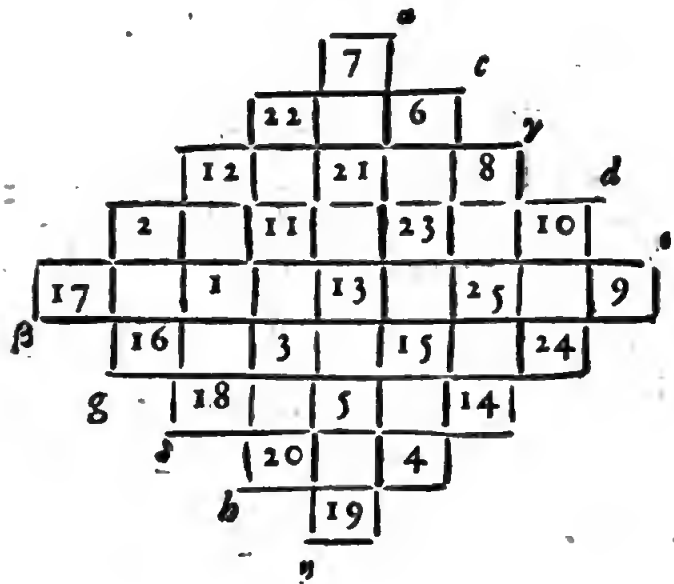


12 16 5 24 8
6 15 19 3 22
25 9 13 17 1
4 23 7 11 20
18 2 21 10 14

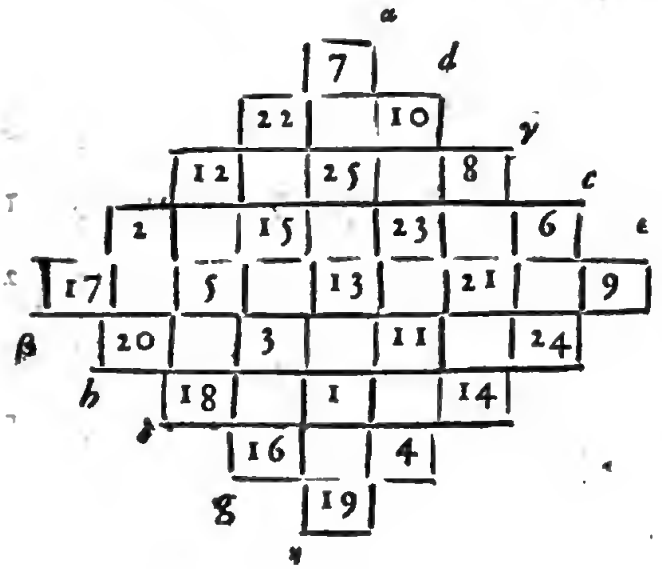


11 17 4 25 8
7 14 20 3 21
24 10 13 16 2
5 23 6 12 19
18 1 22 9 15

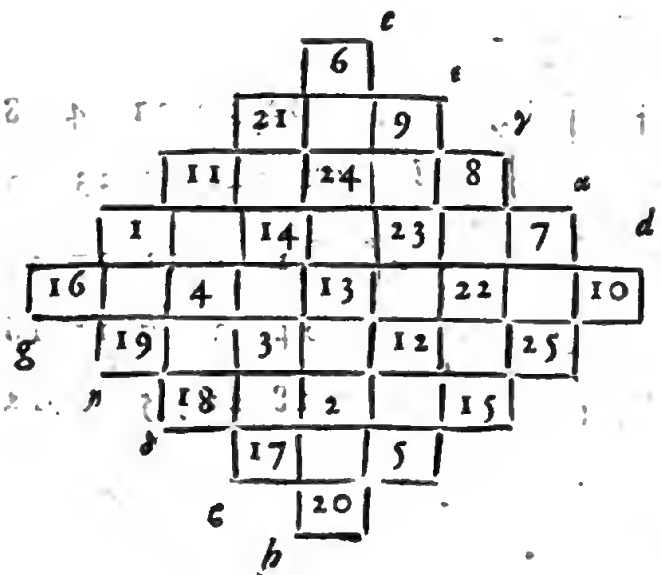
Voici enſuite les tranſpoſitions de la figure C, page 218.



12 20 21 4 8
10 11 19 23 2
1 9 13 17 25
24 3 7 15 16
18 22 5 6 14



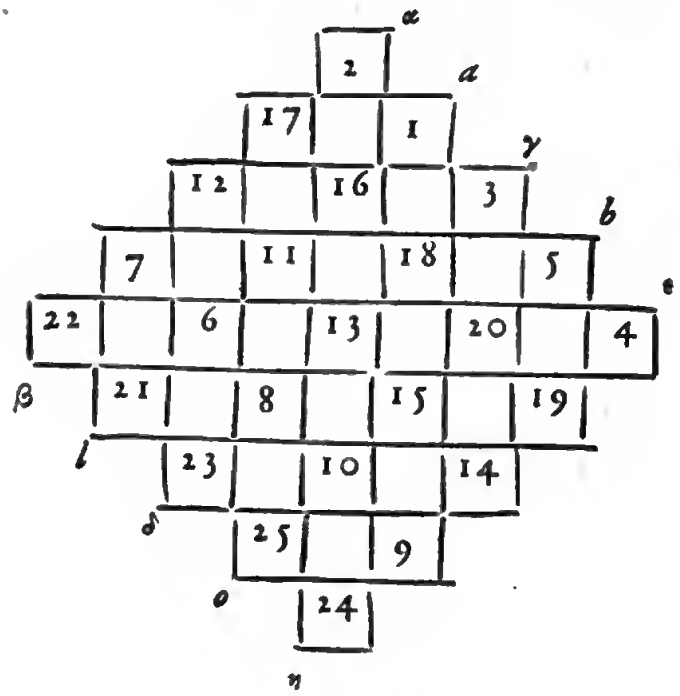
12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14



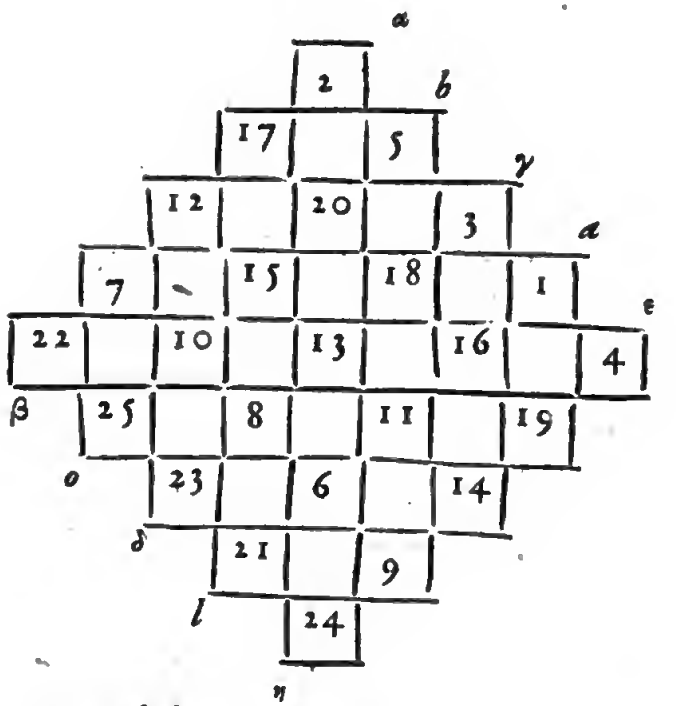
11	17	24	5	8
7	14	20	23	1
4	10	13	16	22
25	3	6	12	19
18	21	2	9	15

Enfin

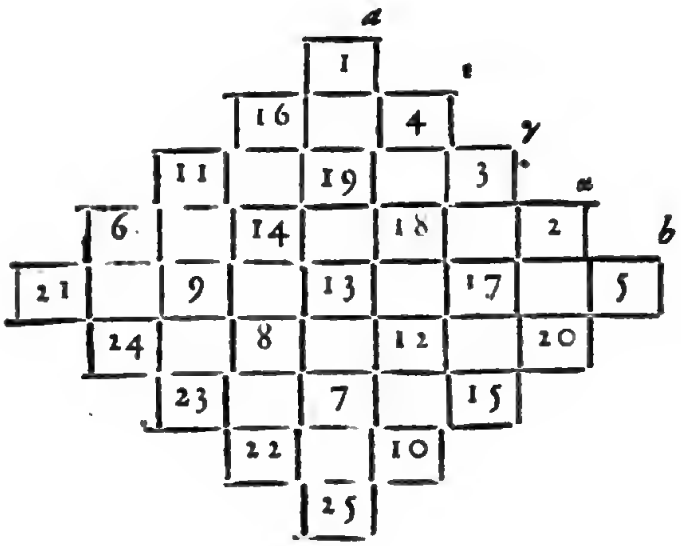
Enfin voici les changemens de la figure D, cy-deſſus.



12	25	16	9	3
5	11	24	18	7
6	4	13	22	20
19	8	2	15	21
23	17	10	1	14



12	21	20	9	3
1	15	24	18	7
10	4	13	22	16
19	8	2	11	25
23	17	6	5	14



11	22	19	10	3
2	14	25	18	6
9	5	13	21	17
20	8	1	12	24
23	16	7	4	15

On peut encore varier ces Tables d'une autre maniere; par exemple la premiere Table de 5, qui eſt

A

a	*b*	*c*	*d*	*e*	
11	24	7	20	3	
ϖ 4	12	25	8	16	ζ
γ 17	5	13	21	9	δ
ι 10	18	1	14	22	η
23	6	19	2	15	
f	*g*	*h*	*l*	*p*	

B

11	20	7	24	3	
ϖ 4	8	25	12	16	ζ
17	21	13	5	9	
ε 10	14	1	18	22	η
23	2	19	6	15	

C

11	24	7	20	3
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15

D

11	20	7	24	3
10	14	1	18	22
17	21	13	5	9
4	8	25	12	16
23	2	19	6	15

Digitized by Google

Conſiderant que les nombres des diagonales également diſtans du milieu 13, & pris deux à deux, font toûjours un même nombre, ſçavoir le double de 13 : car de là s'enſuit que mettant la ligne *b g*, à la place de *d l*, on aura la Table ſuivante qui eſt encore ſelon les régles, vû que la ligne *b g* étant égale à *d l*, la tranſpoſition ne leur apporte aucun changement, non plus qu'aux lignes *a c*, *α ε*, *γ δ*, &c. deſquelles on n'ôte aucun nombre. *Voyez la figure B.*

Toute la difficulté ſe pourroit rencontrer aux diagonales, mais les nombres également diſtans du milieu 13, faiſant tous une même ſomme (ce qui arrive en toutes les tables faites comme il a été montré ci-devant) on n'ôte rien à l'une des diagonales, qu'on n'en remette autant en nombres équivalens ; ainſi en la diagonale *e f*, de la table A, au lieu de 8, 18, qui font 26, on remettra 12, 14, qui font pareillement 26.

On pourra encore changer la figure A, en tranſpoſant la ligne *α ε*, & la mettant en la place de *ε η*, comme on voit ci-deſſus en la figure C.

Après on changera tout enſemble les lignes *b g*, & *α ε*, de la figure A, mettant *b g* à la place de *d l*, & *α ε*, à la place de *ε η* : ou ce qui eſt la même choſe, mettant ſeulement *α ε*, de la figure B, en la place de *ε η*, on aura la figure D.

On changera encore d'une autre ſorte la figure A, en mettant *e p*, à la place de *d l*, & *a f*, à la place de *b f*.

Comme auſſi on pourra mettre *a e*, à la place de *α ε* ; & *f p*, à la place de *ε η*.

Enfin on fera tous ces changemens enſemble, ce qui donnera les trois figures ſuivantes ; en la premiere deſquelles eſt le premier changement ; en la ſeconde le ſecond ; & en la troiſiéme les deux enſemble.

Premiere.					*Seconde.*					*Troiſième.*				
24	11	7	3	20	4	12	25	8	16	12	4	25	16	8
12	4	25	16	8	11	24	7	20	3	24	11	7	3	20
5	17	13	9	21	17	5	13	21	9	5	17	13	9	21
18	10	1	22	14	23	6	19	2	15	6	23	19	15	2
6	23	19	15	2	10	18	1	14	22	18	10	1	22	14

Si on donne à la figure B, les trois changemens, on aura auſſi pareillement trois autres figures, qui ſont les ſuivantes.

20	11	7	3	24	4	8	25	12	16	8	4	25	16	12
8	4	25	16	12	11	20	7	24	3	20	11	7	3	24
21	17	13	9	5	17	21	13	5	9	21	17	13	9	5
14	10	1	22	18	23	2	19	6	15	2	23	19	15	6
2	23	19	15	6	10	14	1	18	22	14	10	1	22	18

Pareils changemens étant obſervez en C, donneront

24	11	7	3	20	10	18	1	14	22	18	10	1	22	14
18	10	1	22	14	11	24	7	20	3	24	11	7	3	20
5	17	13	9	21	17	5	13	21	9	5	17	13	9	21
12	4	25	16	8	23	6	19	2	15	6	23	19	15	2
6	23	19	15	2	4	12	25	8	16	12	4	25	16	8

De la figure D, on aura auſſi les deux ſuivantes.

20	11	7	3	24	10	14	1	18	22
14	10	1	22	18	11	20	7	24	3
21	17	13	9	5	17	21	13	5	9
8	4	25	16	12	23	2	19	6	15
2	23	19	15	6	4	8	25	12	16

La troiſième eſt ſemblable à une figure qui eſt ci-devant au haut de la page 224, & dont la premiere ligne eſt 12, 16, 25, 4, 8.

Digitized by Google

On aura donc par ce moyen quatorze transpositions de la figure marquée A, cy-dessus, qui avec la figure A, font quinze figures, & parce qu'ensuite de la figure A, il y a encore 15 autres figures, qui se font par le rombe ou chassis; comme on peut voir aux pages 218, & suivantes, si chacune d'elles donne autant de figures differentes, on auroit en tout 240 figures: mais il faut prendre garde s'il n'y aura point de figures semblables parmi ce nombre.

Voici des exemples de la figure B cy-dessus, que nous avons remise ici, afin de la comparer avec celles qui en proviennent.

		11	19	2	25	8
		9	12	20	3	21
		22	10	13	16	4
		5	23	6	14	17
		18	1	24	7	15

B

11	25	2	19	8
9	3	20	12	21
22	16	13	10	4
5	14	6	23	17
18	7	24	1	15

11	19	2	25	8
5	23	6	14	17
22	10	13	16	4
9	12	20	3	21
18	1	24	7	15

11	25	2	19	8
5	14	6	23	17
22	16	13	10	4
9	3	20	12	21
18	7	24	1	15

Ce sont là les premiers changemens, chacun desquels souffre encore d'autres transpositions, ainsi que l'on a pû remarquer en la figure A, & qui donnent les figures suivantes.

9	12	20	3	21
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
5	23	6	14	17

19	11	2	8	25
12	9	20	21	3
10	22	13	4	16
23	5	6	17	14
1	18	24	15	7

1	18	24	15	7
12	9	20	21	3
10	22	13	4	16
23	5	6	17	14
19	11	2	8	25

9	3	20	12	21
11	25	2	19	8
22	16	13	10	4
18	7	24	1	15
5	14	6	23	17

25	11	2	8	19
3	9	20	21	12
16	22	13	4	10
14	5	6	17	23
7	18	24	15	1

3	9	20	21	12
25	11	2	8	19
16	22	13	4	10
7	18	24	15	1
14	5	6	17	23

5	23	6	14	17
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
2	12	20	3	21

23	5	6	17	14
19	11	2	8	25
10	22	13	4	16
1	18	24	15	7
12	9	20	21	3

3	14	6	23	17
11	25	2	19	8
22	16	13	10	4
18	7	24	1	15
9	3	20	12	21

25	11	2	8	19
14	5	6	17	23
16	22	13	4	10
3	9	20	21	12
7	18	24	15	1

Les deux places vuides montrent que les figures qui y devroient être ſont ſemblables à quelques-unes des tables précedentes, & elles ont été obmiſes pour éviter la répétition.

On peut donc voir que la table B, ſe varie en 14 façons elle compriſe ; mais la précedente table A, ſe varie en 15 ſortes, d'où s'enſuit qu'on n'aura pas 240 variations en tout, car il faudroit que chacune des tables eût autant de variations que la premiere, ce qui n'eſt pas, à cauſe que les mêmes reviennent.

On pourra faire les variations des autres tables ainſi qu'on a fait aux deux premieres A, & B.

Il ſe trouve encore d'autres variations, qui ne ſont pas ſi faciles que les précedentes ; ſçavoir celles auſquelles le nombre 13, qui tient le milieu à toutes les tables précedentes, ſe trouve changé, & hors de cette place.

Mais toutes les tables précedentes ne peuvent pas ſouffrir cette variation, car entre les premieres qui ſe font par les rombes ou chaſſis, il n'y a que la premiere marquée A, & la premiere de la page 431, & cette façon de changement, ſçavoir de la figure A, ne fait pas que toutes ſortes de nombres puiſſent occuper le milieu; mais on n'y pourra placer par cette voye que 7, 9, 17, 19.

Les autres figures qui ſont enſuite des premieres, donnent bien auſſi quelques variations, qui néanmoins ſe peuvent faire ſans elles en conſéquence des changemens des deux premieres marquées A, A.

Voici donc de quelle façon on changera la figure A.

	a		*c*			*e*
	11	24	7	20	3	
	4	12	25	8	16	
A	*γ* 17	5	13	21	9	*δ*
	10	18	1	14	22	
	23	6	19	2	15	
	f		*h*			*p*

Cette figure ſe changera en quatre façons.

La premiere, mettant la ligne *a e*, à la place de *γ δ*.

La ſeconde, mettant la ligne *e p*, à la place de *c h*.

La troiſiéme, mettant la ligne *f p*, au lieu de *γ δ*.

Et la quatriéme, mettant la ligne *a f*, au lieu de *c h*. Et on aura les quatre figures ſuivantes, la premiere deſquelles a 7 au milieu, au lieu de 13, la ſeconde a 9 au milieu, la troiſiéme a 19, & la quatriéme 17.

	a	*c*	*e*		
12	16	25	4	8	
a 6	15	19	23	2 *e*	
γ 5	9	13	17	21 *δ*	L
f 24	3	7	11	20 *p*	
18	22	1	10	14	
	β	*h*	*η*.		

où on changera *a c*, en *c h*, pour avoir la premiere figure *e η*, en *c h* pour la ſeconde *a e* en *γ δ*, pour la troiſiéme, & enfin *f p*, en *γ δ*, pour la derniere, & on aura les figures ſuivantes.

12	25	16	4	8
6	19	15	23	2
5	13	9	17	21
24	7	3	11	20
18	1	22	10	14

12	16	4	25	8
6	15	23	19	2
5	9	17	13	21
24	3	11	7	20
18	22	10	1	14

12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14

Chacune de ces figures, & des quatre autres précédentes qui ſont en l'autre page, ſouffrent encore pluſieurs ſortes de changemens, dont on donnera ici quelques exemples.

Premierement on leur peut attribuer les mêmes changemens qu'à la figure dont elles proviennent : ainſi la premiere figure de celles qui viennent de A, ſçavoir celle qui eſt ici marquée H, ſouffre les mêmes variations que A, car on poura tranſpoſer *a f*, & *e p*, en *c h*, & pareillement *a e*, & *f p* en *γ δ*, mais entre ces Tables il y en auroit une ſemblable à la Table A : on mettra ſeulement ici celles qui

	a		*c*		*e*
	17	5	13	21	9
	4	12	25	8	16
H ♈	11	24	7	20	3 ♉
♐	10	18	1	14	22 ♊
	23	6	19	2	15
	f		*h*		*p*

ont un nouveau nombre au milieu ; car il n'y a aucun nombre impair, qui ne puiſſe tenir le milieu de la figure, comme l'on voit par les ſuivantes.

13	5	17	21	9
25	12	4	8	16
7	24	11	20	3
1	18	10	14	22
19	6	23	2	15

17	5	9	21	13
4	12	16	8	25
11	24	3	20	7
10	18	22	14	1
23	6	15	2	19

De ces deux on pourra auſſi faire les ſuivantes.

13	5	17	21	9
25	12	4	8	16
19	6	23	2	15
1	18	10	14	22
7	24	11	20	3

17	5	9	21	13
4	12	16	8	25
23	6	15	2	19
10	18	22	14	1
11	24	3	20	7

Il y a encore une autre tranſpoſition de la figure H cy-devant, ſçavoir en mettant ♊, à la place de ♈ ♉, comme on voit ici.

17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
23	6	19	2	15

Et changeant en cette même ſorte les trois autres figures de la page 232, on aura les ſuivantes.

11	3	24	20	7		11	24	7	20	3		7	24	20	11	3
4	16	12	8	25		23	6	19	2	15		25	12	8	4	16
17	9	5	21	13		4	12	25	8	16		13	5	21	17	9
10	22	18	14	1		10	18	1	14	22		1	18	14	10	22
23	15	6	2	19		17	5	13	21	9		19	6	2	23	15

On a donc ici des exemples de tous les nombres impairs qui tiennent le milieu des figures; pour ce qui eſt des nombres pairs, il y auroit plus de difficulté à leur faire tenir le milieu de la figure, & peut-être il eſt impoſſible.

Ces figures ſe varient encore d'une autre ſorte, dont il a été fait mention cy-devant: par exemple, la figure H ſe

a					*b*	
	17	5	13	21	9	
	4	12	25	8	16	
	11	24	7	20	3	H
f	10	18	1	14	22	*g*
	23	6	19	2	15	
c					*d*	

variera, mettant *a b*, en la place de *c d*, comme auſſi *a c* en la place de *b d*: & enfin, aſſemblant ces deux variations, ſçavoir, tranſpoſant tout enſemble *a b*, en *c d*, & *a c* en *b d*, on aura les trois Tables ſuivantes.

	9	5	13	21	17	23	6	19	2	15	15	6	19	2	23
	16	12	25	8	4	4	12	25	8	16	16	12	25	8	4
F	3	24	7	20	11	11	24	7	20	3	3	24	7	20	11
	22	18	1	14	10	10	18	1	14	22	22	18	1	14	10
	15	6	19	2	23	17	5	13	21	9	9	5	13	21	17

Les autres Tables peuvent ſouffrir les mêmes variations, qui ſeroient trop longues à déduire, & cela fera une fort grande quantité de Tables differentes: & celles-cy ſuffiront pour faire voir de quelle façon elles ſe pourront trouver.

On pourra encore faire d'autres ſortes de tranſpoſitions ; par exemple, de la figure F, mettant la ligne 9, 5, 13, 21, 17, à la place de 16, 12, 25, 8, 4, parce que 17, & 8, qui ſont dans la diagonale, ſont égaux à 21, & 4. Et pareillement de l'autre côté 16, & 5, ſont égaux à 9 & 12, & pareillement on pourra mettre la ligne 3, 24, 7, 20, 11, à la place de 22, 18, 1, 14, 10, parce que 14, & 7, en la diagonale ſont égaux à 20, & 1 ; & pareillement 7, & 18, ſont égaux à 24, & 1.

Comme auſſi en la figure H, on pourroit tranſporter la ligne 17, 5, 13, 21, 9, à la place de 10, 18, 1, 14, 22, parce que les nombres de la diagonale 9, & 18, ſont égaux à 5, 22, & les deux 17, 14, à 21, & 10. on peut voir ces deux Tables tranſpoſées cy-après, & cette tranſpoſition ſe peut faire toutes fois & quantes qu'on peut choiſir un quarré dans la figure qui ait deux de ſes angles dans la diagonale de la figure, & auquel les nombres des angles oppoſez ſoient égaux à ceux des deux autres angles, & que la même choſe arrive au quarré pris dans les mêmes lignes qui bornent le quarré dans l'autre côté de la figure.

Ainſi en la figure H, je choiſis un quarré dont les angles ſont 5, 9, 22, 18, dont deux, ſçavoir 18 & 9, ſont dans la diagonale, & les angles oppoſez, comme 18 & 9, ſont enſemble égaux aux deux autres 22 & 5 ; & ſi on prend le quarré qui eſt de l'autre côté de la figure entre les mêmes lignes *a b*, & *f g*, dont les angles ſont 17, 21, 14, 10, on trouvera de même que les angles oppoſez 17, 14, ſont égaux aux deux autres 10, 21.

16	12	25	8	4
9	5	13	21	17
3	24	7	20	11
22	18	1	14	10
15	6	19	2	23

9	5	13	21	17
16	12	25	8	4
22	18	1	14	10
3	24	7	20	11
15	6	19	2	23

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15

Digitized by Google

Les Tables, dont le côté eſt pair, ſe trouveront d'une autre façon, laquelle eſt auſſi commune avec les impairs: mais premierement nous donnerons celle de 16, qui a 4 de côté.

Il faut diſpoſer les 16 nombres ſelon leur ordre naturel, comme on voit ici.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Puis on marque les diagonales avec des points, afin de remarquer les nombres qui s'y trouvent, car les mêmes ſeront auſſi dans les diagonales de la Table, en même ſituation qu'ils ſont ici. Je mets donc à part les nombres qui compoſent les diagonales en la même diſpoſition, comme il eſt ici marqué.

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Et pour achever la Table on met les nombres qui ſont hors des diagonales, vers leurs oppoſez en croix; ſçavoir 14 à la place de 3, 15 à la place de 2, 12 à la place de 5, & 8 à la place 9, & on aura la figure ſuivante.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

METHODE GENERALE pour faire les Tables Magiques.

PAr la méthode ſuivante on pourra faire toutes ſortes de Tables tant paires qu'impaires, mais il faut remarquer une proprieté particuliere des Tables faites par cette méthode, qui eſt que ſi on ôte l'enceinte de quelqu'une de ces Tables, celle qui reſtera ne laiſſera pas d'avoir encore toutes ſes lignes égales; & ſi de ce reſte on ôte encore une enceinte, le reſte aura encore ſes lignes égales, & ainſi juſqu'à ce que la derniere Table qui reſte n'ait plus que 4 de côté ſi elle eſt paire; & 3 de côté ſi elle eſt impaire, car il n'y a point de Table de 4 de côté, dont ôtant une enceinte, le reſte ait ſes lignes égales.

Exemple. Que la Table ait 12 de chaque côté, ſi on ôte la premiere enceinte, il reſtera une Table qui aura 10 à chacun de ſes côtez, & qui aura encore ſes lignes égales. Et ôtant une enceinte de cette Table de 10, on aura une Table de 8 qui aura encore toutes ſes lignes égales.

Et ſi de cette Table de 8 on ôte encore une enceinte, il reſtera une Table de 6.

Enfin ſi on ôte une enceinte de cette Table de 6, il reſtera une Table de 4, qui aura encore les conditions requiſes.

Et ainſi ayant une Table de 12, on en aura auſſi une de 10, une de 8, une de 6, & de 4.

On trouve enſuite des moyens pour faire qu'il n'y ait qu'une ſeule Table qui ſoit bonne, & qu'ôtant les enceintes, celle qui reſte ne ſoit plus ſelon les regles; ou ſi l'on veut, telle Table qu'on voudra ſera bonne, & les autres ne vaudront rien. Ainſi ayant une Table de 12, on pourra faire qu'ôtant quelques enceintes qu'on voudra, le reſte ne ſoit pas bon; ou bien que les Tables de 8 & de 4 qui y ſont contenuës, ſeront bonnes, & les autres non; & cela ſe peut faire en toutes les manieres qu'on voudra.

Mais parce que les exemples apprendront mieux la maniere de faire ces Tables, que tous les préceptes qu'on en pourroit donner, il ſera plus à propos de faire connoître ceux-ci par le moyen de ceux-là.

Exemple premier d'une Table de 6.

IL faut en premier lieu diſpoſer les nombres dont on doit remplir les 36 cellules de la Table, ſelon leur ordre naturel, & en faire deux lignes, qui ſeront l'une deſſus l'autre, en telle ſorte que les nombres des deux lignes qui ſont l'une ſur l'autre faſſent 37, ſçavoir 1, plus que le plus grand nombre, qui eſt 36, comme on les voit ici; & les nombres de ces deux lignes ſe nommeront relatifs: ainſi 35 eſt relatif de 2, 34 de 3, & ainſi des autres: de même 6 ſera relatif de 31, 7 de 30, &c.

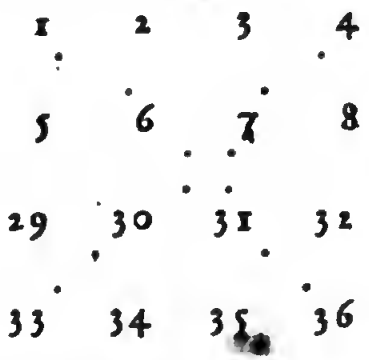
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Et cela ſe doit obſerver en toutes Tables, afin de pouvoir avec plus de facilité choiſir les nombres dont on a beſoin.

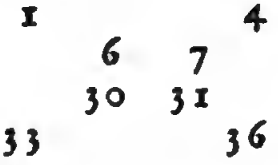
Après on prendra ſeize nombres, ſçavoir huit de la premiere ligne, & les huit correſpondans ou relatifs dans la ſeconde. Il ſera bon que les huit nombres ſoient de ſuite ou qu'ils ayent entre eux une difference égale, quoiqu'il ſuffiſe que quatre de ces nombres ayent une même difference, & les quatre autres auſſi, & enſuite on prendra leur relatifs; car en cette façon de conſtruire les Tables, il faut être ſoigneux de ne prendre jamais un nombre, qu'on ne ſe ſerve auſſi de ſon relatif, autrement on ne pourroit pas faire une Table par cette méthode.

Je prens donc les huit premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, & leurs relatifs 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, qui ſont 16 nombres, dont je fais une Table de 4, ainſi qu'il a été enſeigné à la page 237 du Traité précé-

dent ; ſçavoir écrivant les ſeize nombres, comme on voit ici.



Puis retenant les diagonales, comme l'on voit dans la figure ſuivante.



Et enfin rempliſſant les eſpaces vuides, en y mettant les nombres oppoſez en croix ; ſçavoir 35 à la place de 2, & 2 à la place de 35, puis 34 à la place de 3, & ainſi des autres, on aura la figure diſpoſée comme il ſuit.

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Ces nombres étant employez, je les marque par quelque ſigne, comme on peut voir en la page précedente, où tous les trente-ſix nombres ſont de ſuite en deux lignes, afin qu'on puiſſe connoître ceux qui ont déja ſervi à faire la Table intérieure, & qu'on ne prenne point deux fois un même nombre.

Cela fait, je choiſis deux nombres de ceux qui reſtent, pour mettre près des angles de la figure de quatre, ſçavoir

voir en continuation de ſa diagonale, qui ſerviront d'angles à l'autre enceinte exterieure.

On prendra, par exemple, 9 & 10 pour les deux angles, ou extrémitez d'une même ligne.

Ayant mis les nombres 9 & 10 aux angles prochains, & non pas oppoſez, je mets leurs complémens aux angles oppoſez, comme on voit ici, ſçavoir 28 à l'oppoſite de 9, & 27 à l'oppoſite de 10.

9				10		9	25	26	23	18	10
	1	35	34	4		16	1	35	34	4	21
	32	6	7	29		20	32	6	7	29	17
	8	30	31	5		24	8	30	31	5	13
	33	3	2	36		15	33	3	2	36	22
27				28		27	12	11	14	19	28

Cela fait, je conſidere ce qu'il faut dans deux lignes prochaines de la derniere enceinte pour les achever; car lors qu'on a deux lignes prochaines, les complémens des nombres donnent les oppoſez. Je trouve que dans la ligne 9, 10, il faut 92 pour parfaire la ligne; car chaque ligne doit être de 111; ce qui ſe trouve multipliant la ſomme des deux nombres extrêmes de la figure, qui ſont 1, & 36, dont la ſomme eſt 37, par la moitié des nombres qui ſont en chaque ligne, ſçavoir par 3.

Et de ce produit 111, ôtant 19, qui eſt la ſomme de 9 & 10, il reſtera 92 pour la ſomme des quatre nombres qui doivent être mis entre 9 & 10.

De même, ſi de 111 j'ôte 38, qui eſt la ſomme de 28 & 10, qui ſont aux angles qui bornent la ligne 10, 28, il reſtera 73 pour les quatre nombres qui manquent à la ligne 10, 28.

Il faut donc chercher dans les nombres qui reſtent, quatre nombres, dont la ſomme ſoit 92, & quatre autres dont la ſomme ſoit 73, à telle condition toutefois, qu'après avoir pris un nombre, on ne ſe ſerve plus de ſon com-

plément dans ces deux premieres lignes, parce que ce complément doit être mis dans la ligne opposée ; ce qui doit toujours être exactement observé.

Pour venir plus facilement à bout de cela, l'on écrira les nombres qui restent de suite, & leurs complémens au-dessous, comme il suit.

11	12	13	14	15	16	17	18
26	25	24	23	22	21	20	19
|	|		|			|

Cela fait, je cherche quatre nombres dans ces deux lignes qui fassent 92 : je trouve 26, 25, 23, 18 : je les marque au-dessous avec de petites lignes, afin de ne les plus reprendre, ni leurs complémens aussi. Après, je choisis quatre nombres dans les huit qui restent, qui fassent 73 ; mais en choisissant les deux premiers, il faut faire en sorte qu'il ne reste pas 37 pour les deux autres, ainsi les deux nombres ne pourront pas être 16, & 20, qui font 36, parce qu'il resteroit 37 pour les deux autres nombres, ce qui ne se peut faire que par deux relatifs, comme par 15, 22, & 13, 24, ce qui est contre les regles ; c'est pourquoi il faudra prendre deux nombres qui fassent plus ou moins de 36, comme 21 & 17, qui font 38, & reste 35. Pour achever 73, on fera 35 avec 13, & 22 : on aura donc les quatre nombres 21, 17, 13, 22 ; qu'on mettra entre 10, & 28, & il n'importe pas en quel ordre, pourvû que vis-à-vis d'eux en la même ligne de la colomne opposée ; sçavoir entre 9, & 27, on mette leurs complémens selon le même ordre, comme on voit en la figure qui est achevée en la page précédente.

De même, je mets entre 9 & 10 les quatre nombres qui ont été premierement trouvez, sçavoir 26, 25, 23, 18 ; & vis-à-vis en la ligne opposée, & entre 27, 28, je mets leurs complémens 11, 12, 14, 19. Et ainsi on aura la figure parfaite.

Second exemple de la Table de 6.

IL y a une choſe à obſerver quand les nombres de la Table intérieure de quatre ſont tous de ſuite, & que les vingt de l'enceinte exterieure ſont les dix premiers, & leurs complémens ; ſçavoir,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

En ce cas il ne faudra pas prendre pour les angles prochains, deux nombres qui ſoient en quotité pairs ou impairs, ſçavoir en cet exemple deux pairs ou deux impairs, comme 2, 4, ou 3, 5, ou 5, 9, & autres ſemblables, autrement on ne pourroit pas achever la Table, parce qu'il arrive toujours en faiſant la ſeconde ligne, que la ſomme des nombres eſt paire quand elle doit être impaire, & au contraire ; la raiſon eſt qu'en la ſeconde ligne il faut toujours prendre deux des grands nombres, & deux des moindres, à cauſe qu'ils ſont beaucoup differens l'un de l'autre.

Voici une Table qui a ces nombres à ſon enceinte exterieure.

	1	8	31	32	35	4		
	27	11	25	24	14	10		
	34	22	16	17	19	3		
	9	18	20	21	15	28		
	7	23	13	12	26	30		
	33	29	6	5	2	36		
1]	2	3	5	6	7	8	9	10 [4 | 106 71
	35	34	32	31	30	29	28	27

Il arrive aſſez ſouvent en ces petites figures, à cauſe du peu de nombres qu'il y a en chaque ligne, qu'ayant choiſi

les quatre pour la premiere ligne, ceux de la ſeconde ne peuvent pas faire la ſomme qui ſeroit néceſſaire ; comme en cet exemple, ſi entre 1 & 4 on mettoit 35, 32, 30, 9, qui enſemble font 106, ainſi qu'il eſt requis, il reſteroit 3, 6, 8, 10, & leurs complémens 34, 31, 29, 27, qu'on ne peut pas employer pour faire 71, qui eſt la ſomme que doivent avoir les quatre nombres qu'on doit mettre entre 4 & 36, c'eſt pourquoi on changera les quatre de la premiere ligne qui ſont entre les angles, & au lieu de 35, 32, 30, 9, on en prendra d'autres équivalens; par exemple, 35, 32, 29, 10. Mais parce que les nombres qui reſtent pour l'autre ligne ne peuvent pas encore faire 71, il les faudra encore changer, & prendre 35, 31, 30, 10, & ceux qui reſteront pourront faire 71, comme l'on voit aſſemblant les quatre nombres, 3, 8, 28, 32.

Que ſi après avoir changé les lignes en diverſes manieres, on ne pouvoit trouver ſon compte, il faudroit avoir recours aux angles & les changer, ou du moins l'un d'eux, & ſon complément, tant que la difficulté ceſſe.

Enfin cela dépend plus de l'induſtrie de celui qui cherche, que non pas de certaine regle infaillible qu'on pourroit donner pour cet effet, laquelle ſe peut bien trouver pour les impairs, comme il a été montré cy-devant, mais la même choſe ne ſuccede pas aux Tables paires. Voici pourtant une méthode qui facilitera beaucoup cette recherche.

Ayant écrit les huit nombres entre les deux qui ſont aux angles, comme on voit au bas de la page 243, on mettra enſuite la valeur des quatre nombres qui doivent être entre 1 & 4, qui eſt 106, parce qu'ôtant 5, ſçavoir la ſomme de 4 & 1, de 111, qui eſt la valeur de chaque ligne, il reſte 106 ; on mettra auſſi la valeur des quatre nombres qui doivent être entre 4 & 36, qui eſt 71 ; je cherche après quatre nombres dans les ſeize des deux lignes, qui valent 106, à telle condition qu'après avoir

pris un des nombres, on ne prenne pas auſſi ſon complément, & commençant par les deux plus grands 35 & 34, qui enſemble valent 69, il faut ôter cette ſomme de 106, reſte 37; qui étant la ſomme des deux relatifs, ne peut pas être employée dans ces Tables. Il faut donc prendre deux autres nombres, ſçavoir 35 & 32, la ſomme eſt 67, qui ôtée de 106, reſte 39, on fera 39 avec 31, 8: on aura donc les quatre nombres 35, 32, 31, 8, qu'il faudra mettre entre 1 & 4 de la Table A. Il faut après remplir la ligne 4, 36, avec quatre des nombres qui reſtent, qui ſont 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27.

Voici comme on y procedera. Il faut aſſembler les quatre moindres nombres, ſçavoir 3, 7, 9, 10: la ſomme eſt 29, qui ôtée de 71 qui eſt la valeur de quatre nombres, qui doivent être mis entre 4 & 36 de la table A, reſte 42.

A

1					4
	11	25	24	14	
	22	16	17	19	
	18	20	21	15	
	23	13	12	26	
33					36

Il faut voir ſi on pourra faire 42 avec la difference qui eſt entre les quatre nombres, 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27; comme on peut voir en cette figure, & leur difference entre deux; on trouve 23 & 19

3	7	9	10
21	23	19	17
34	30	28	27

differences entre 7, 30, & 9, 28, qui ſont 42. On prendra donc 3, 30, 28, 10, pour les quatre nombres qui doivent être mis entre 4, 36, qui ſont aux extrémitez

de la derniere colomne, car puiſque les quatre nombres 3, 7, 9, 10, manquent de 42 pour faire 71, qui eſt la valeur de quatre nombres qui doivent être entre 4 & 36, & que 30 & 28 ſurpaſſent 7 & 9 de 42, il faudra prendre 30 & 28, au lieu de 7 & 9; on aura donc la table accomplie, comme on la voit ici, mettant les quatre nombres

1	35	32	31	8	4
34	11	25	24	14	3
7	22	16	17	19	30
9	18	20	21	15	28
27	23	13	12	26	10
33	2	5	6	29	36

ci-devant trouvez, ſçavoir 35, 32, 31, 8, entre 1 & 4, & les complémens de ces nombres 2, 5, 6, 29, en la même colomne, & vis-à-vis des précedens en la ligne oppoſée, avec les deux nombres 33, complément de 4 & 36, complément de 1, qu'il faut mettre aux angles en même diagonale: puis entre 4 & 36 on mettra les quatre autres nombres 3, 30, 28, 10, & leurs rélatifs 34, 7, 9, 27, vis-à-vis des précedens dans la colomne oppoſée, & à l'autre extrémité de la même ligne.

Si on avoit pris 1, 3, pour les nombres qui doivent être aux angles, ou aux extrémitez d'une même ligne, on ne pourroit pas parfaire cette ligne, comme il a été remarqué ci-devant. La raiſon eſt, qu'on eſt obligé pour

1]	2	4	5	6	7	8	9	10	[3	107
										72
	35	33	32	31	30	29	28	27		

faire 107, de prendre trois nombres de la ligne inferieure, où ſont les plus grands nombres, & un de la ſuperieure, parce que les quatre moindres de la ligne inferieure,

ſçavoir 27, 28, 29, 30, font plus de 107, encore que 107 ſoit le plus grand nombre que puiſſent avoir les quatre nombres, en prenant des nombres ſemblables pour les angles, ſçavoir tous deux pairs ou impairs, & ſi on n'en prenoit que deux dans la ligne inférieure, & deux dans la ſuperieure, ils ne ſeroient pas aſſez grands; car encore que l'on mît aux angles les plus grands nombres de la ligne ſuperieure, ſçavoir 8 & 10 qui ſont ſemblables en parité ou imparité, étant tous deux pairs, il reſteroit 93 pour la ſomme des quatre nombres qui devroient être entre-deux. Or prenant les deux plus grands nombres de la ligne inferieure, & les deux plus grands de la ſuperieure, ſçavoir 35, 33, 7, 9, ils feront moins de 93. Il faut donc prendre trois nombres de la ligne inferieure, & un de la ſuperieure.

Or après avoir pris ces quatre nombres qui faſſent 107, ou autre nombre requis: Par exemple, après avoir pris 35, 33, 32, 7, qui font 107, on ne pourra jamais faire 72, qui eſt la ſomme des nombres qui doivent faire l'autre ligne, avec quatre des nombres qui reſtent; car prenant deux de ces nombres dans la ligne inferieure, & deux dans la ſuperieure, comme il eſt néceſſaire pour faire 72, ſçavoir la ſomme des quatre nombres qui doi-

1] 2 4 5 6 7 8 9 10 [3 | 107 / 72

35 33 32 31 30 29 28 27

vent achever l'autre ligne; en ſorte que dans ces quatre nombres il n'y en ait point deux qui ſoient rélatifs, c'eſt-à-dire dont la ſomme faſſe 37, car il arrivera toûjours que la ſomme de ces quatre nombres ſera un nombre impair, au lieu que 72 eſt pair. Ainſi prenant 31, 29, qui enſemble font un nombre pair, il reſtera 9, 10, qui en-

ſemble font un impair, & ainſi la ſomme des quatre ſera impaire.

De même, ſi on prenoit 31, 28, dont la ſomme eſt impaire, les deux autres qui reſtent ſeroient 10, 8, dont la ſomme eſt paire, qui jointe à la ſomme précedente qui eſt impaire, la ſomme ſera encore impaire; & cela arrivera toûjours de la même façon, ſi ce n'eſt que les nombres ſoient tels, qu'on puiſſe prendre pour la ſeconde ligne trois nombres dans une des lignes, & un dans l'autre; ou bien que pour la premiere ligne, on puiſſe prendre tous les quatre nombres dans une même ligne.

Pour les tables impaires, ſi on les veut faire en la même maniere que les paires; ſçavoir, faiſant que les rélatifs ſoient oppoſez, il faut prendre garde qu'entre les nombres qui doivent ſervir à remplir les deux côtez prochains, c'eſt-à-dire, qui aboutiſſent à un même angle, après que ceux des angles ſeront placez, s'il ſe trouve des impairs, ils doivent être en multitude paires, comme 2, 4, ou 6, &c. ce qui ſe doit entendre prenant le nombre & ſon complément pour un ſeul nombre, car s'il n'y avoit qu'un impair, ou 3, ou 5, ou autre multitude impaire pour les deux lignes qu'il faut remplir, cela ne ſe pourroit; la raiſon eſt, que ſi les deux nombres des angles ſont tous deux pairs, ou tous deux impairs, la ſomme des nombres qui reſtent à mettre en chaque ligne doit être impaire; à cauſe que la ſomme des nombres de la ligne doit être impaire, ſuppoſant que les nombres commencent par 1, & ſoient de ſuite. Si donc on avoit trois impairs, ou autre multitude impaire, il faudroit les mettre tous trois dans une même ligne pour la faire impaire, ou ſi l'on n'en mettoit qu'un, il en reſteroit deux pour l'autre ligne, ce qui fera que cette portion de ligne ſera impaire, ſçavoir autrement qu'elle ne doit être, à cauſe des nombres qui ſont aux angles, dont la ſomme eſt impaire, & joignant cette impaire à l'autre portion de ligne qui ſeroit auſſi impaire,

paire ; ſçavoir, la portion qui eſt entre les deux angles, ſeroit toute la ligne paire ; mais elle doit être impaire.

Que ſi le nombre de l'un des angles eſt pair, & l'autre impair, la ſomme des nombres qui reſtent à mettre à chaque ligne ſera paire ; & ainſi étant contraint de mettre à une des lignes un ou trois impairs, cela fera que la portion de la ligne qui eſt entre deux angles ſera impaire, ſçavoir autrement qu'elle ne doit être.

Ainſi après avoir fait la table de trois, qui eſt ci-deſſous, pour faire l'enceinte exterieure de cinq, on a de reſte les nombres 1, 3, 4, 6, &c. & leurs complémens, comme on voit enſuite. Si on met donc 1 à l'un des angles, & ſon complément 25 à l'angle oppoſé, & qu'à l'autre angle on mette le nombre ſuivant 3, il reſteroit trois impairs dans la ligne ſuperieure pour remplir les deux lignes, ſçavoir 7, 9, 11, c'eſt pourquoi on ne pourra pas mettre 3 à cet angle, ni aucun autre impair, mais un pair comme 4, parce que mettant 4, il reſtera 4 impairs ; ſçavoir 3, 7, 9, 11, & on pourra achever la table de 5, comme on la voit enſuite.

1 3 4 6 7 9 11 12
25 23 22 20 19 17 15 14

1				4
	10	24	5	
	8	13	18	
	21	2	16	
22				25

1	23	20	17	4
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
22	3	6	9	25

Troiſiéme exemple de 6.

ON n'eſt pas obligé de prendre huit nombres de ſuite, & leurs complémens, pour faire la table interieure qui a quatre de côté ; mais il ſuffit que quatre de ces nombres ayent même difference, & les quatre autres pareillement. Ainſi on pourra prendre 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11,

& leurs complémens, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, pour la table de quatre qui ſera

1	35	34	4
29	9	10	26
11	27	28	8
33	3	2	36

13	22	20	30	12	14
5	1	35	34	4	32
31	29	9	10	26	6
21	11	27	28	8	16
18	33	3	2	36	19
23	15	17	7	25	24

Et prenant pour les angles 13 & 14, & leurs complémens 24 & 23, on aura la figure de 6 ci-deſſus.

Quatriéme exemple de 6.

ON peut auſſi commencer les huit, & leurs complémens, de la table interieure de quatre, par un autre nombre que 1, & auſſi ne les point prendre de ſuite, comme on voit en la table ſuivante, en laquelle on a pour la table interieure de 4, les nombres 2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 19, & leurs complémens 18, 20, 22, 24, 29, 31, 33, 35. Laquelle table de 4 ſera,

2	33	31	8
24	15	17	18
19	20	22	13
29	6	4	35

A B

1	34	27	26	16	7
9	2	33	31	8	28
14	24	15	17	18	23
25	19	20	22	13	12
32	29	6	4	35	5
30	3	10	11	21	36

D C

Et prenant pour les angles 1 & 7, & leurs complémens 36, 30, on fera la derniere enceinte qui eſt l'exterieure des nombres qu'on voit à la figure ci-deſſus.

Cette derniere façon ſe trouve aſſez ſouvent difficile, car il peut arriver qu'on prendra pour les angles de tels nombres, que les lignes de l'enceinte exterieure ne pourront pas être remplies, ou ce ne ſera qu'après une re-

cherche ennuïeuſe. Par exemple, ſi on prenoit 10 & 16, & leurs complémens 27 & 21 pour les angles de l'enceinte exterieure, au lieu de 1, 7, 36, 30, on ne pourroit parfaire la figure, & on ſeroit contraint de prendre d'autres nombres pour les angles.

Pour voir maintenant de quels nombres il faut remplir les lignes, je conſidere combien il faut de reſte à chaque ligne, ou plûtôt à deux, ſçavoir à deux lignes qui ne ſoient point oppoſées l'une à l'autre : Par exemple, je cherche combien il faut pour achever la ligne A,B, & la ligne B,C, auſquelles on ſuppoſe déja les coins 1 7, & 7 36.

Or parce que chaque ligne doit contenir 111 en ſes ſix nombres, il faut pour la ligne A, B, prendre la ſomme de 1 & 7, qui eſt 8, & l'ôter de 111, reſtera 103 que doivent faire les quatre nombres qui reſtent à trouver pour la ligne A, B.

De même je prens la ſomme de 7 & 36, qui eſt 45, que j'ôte de 111, reſte 68 pour les quatre nombres qu'il faut mettre à la ligne B C.

Pour les deux autres lignes C D, & A D, il ne s'en faut pas mettre en peine; car elles s'enſuivent néceſſairement de leurs oppoſées A B, B C, puiſque l'une des lignes doit avoir les complémens de la ligne qui lui eſt oppoſée.

Je prens après les huit nombres qui reſtent, & les complémens au-deſſous, comme on voit ici.

3 5 9 10 11 12 14 16
34 32 28 27 26 25 23 21

103

34 3
28 9
27 10
14 23

Puis j'écris à part la ſomme que doivent faire enſemble les quatre nombres de chacune des deux lignes, ſçavoir 103 & 68, & je cherche quatre nombres qui faſſent l'un de ces nombres, par exemple 103; mais afin de voir ſi on peut trouver quatre nombres qui faſſent

103, & quatre autres qui faſſent 68, il faut faire toutes les combinaiſons poſſibles. Premierement, je prendrai 34 & 32, qui enſemble font 66, & pour aller juſques à 103, il faut encore 37 pour deux nombres. Mais on ne peut trouver deux nombres qui faſſent 37, s'ils ne ſont complémens l'un de l'autre. Or il ne faut jamais mettre en une même ligne deux nombres qui ſoient les complémens l'un de l'autre, parce que le complément de chaque nombre ſe doit mettre en la ligne oppoſée, ce qu'il faut entendre pour cette méthode ſeulement; car il y a diverſes voyes par leſquelles on pourra bien faire, que deux nombres qui ſoient les complémens l'un de l'autre, ſe trouvent en même ligne.

Puis donc que 32 ne peut être avec 34, je prens le nombre ſuivant 28, qui avec 34 fait 62; & parce que la ligne doit avoir 103, les deux autres nombres doivent faire enſemble 41. Je prens donc le nombre qui ſuit 28, ſçavoir 27 qui avec 14 fait 41. Voilà pour la ligne A B.

Je viens maintenant à la ligne B C, qui doit avoir 68 en ſes quatre nombres, qui doivent être mis entre les coins B & C, & les quatre nombres qui reſtent ſont

32 26 25 21

& leurs complémens qui ſont au-deſſous, 5 11 12 16

Je prens premierement 32, lequel étant joint à 26, donnera 58, & parce que la ligne doit avoir 68, il ne reſte plus que 10 qu'il faudroit faire avec deux nombres, ce qui ne ſe peut avec les quatre nombres reſtans, 25, 21, 16, 12.

Si on joint 32 à 25, ou même à 21, on tombera en même inconvenient, car 32 & 21 font 53, qui ôtés de 68 reſte 15, qu'il faut faire en deux nombres; mais il ne reſte plus que 12 & 11 qui font plus de 15.

Si on joint 32 à 16, on aura 48, qui ôtez de 68 reſtera 20, qui ne ſe peuvent faire par 11 & 12.

On ne ſçauroit paſſer plus outre, parce que ſi on joignoit 12 à 32, on ſeroit contraint de mettre auſſi en même ligne que 32 quelqu'un des nombres précedens, ce que néanmoins on a reconnu être impoſſible.

Il faut donc prendre un autre nombre que 32, puiſqu'il ne peut être en la ligne B C, & ce ſera le nombre ſuivant 26, qui étant joint à 25 fait 51, qui ôtez de 68, reſte 17, qu'il faut faire avec deux nombres pris dans les trois qui reſtent, qui ſont 21, 16, 5, car 32 en a déja été exclus. Mais 17 ne ſe peut faire avec ces nombres.

On joindra après 26 à 21 : la ſomme eſt 47, qui étant ôtée de 68, reſte 21, qu'il faudroit faire avec les deux nombres qui reſtent 12 & 5 ; mais parce qu'ils ſont trop petits pour cet effet, il ne faut point paſſer outre, car ce ſeroit encore pis, ſi on joignoit 26 à 16, ou 25 à 21.

Puis donc que cette ſeconde ligne B C ne ſe peut faire, il faut changer la premiere ligne A B.

Mais afin de n'omettre aucune façon par laquelle on la puiſſe faire, (car ſi on en laiſſoit quelqu'une, ce pourroit être celle dont on auroit beſoin) il faut continuer par le même ordre qu'on a commencé.

On avoit pris 34 & 28 pour les deux premiers nombres, & il reſtoit 41 à faire en deux nombres pour aller juſques à 103.

Pour faire ces 41 on avoit pris 27 & 14, leſquels n'ayant pas bien réüſſi, je cherche ſi on peut faire les mêmes 41 avec deux autres nombres, & je trouve 25 & 16.

Il reſtera donc pour la ſeconde ligne les quatre nombres 32 27 26 23

& leurs complémens 5 10 11 14

Si on examine ces nombres comme ci-devant, on trouvera qu'on ne peut en choiſir quatre d'entr'eux, qui enſemble faſſent 68, pourvû qu'il n'y en ait point deux qui ſoient complémens l'un de l'autre, car on pourroit bien prendre 27, 26, 10, 5, qui enſemble font 68 ; mais

parce que 27 & 10 ſont complémens l'un de l'autre, on ne pourroit avec eux parfaire la figure, comme il a été dit.

								103	
3	5	9	10	11	12	14	16	34	3
34	32	28	27	26	25	23	21	28	9
								25	12
								16	21

On ne peut donc pas faire la premiere ligne avec les quatre nombres 34, 28, 25, 16; & parce qu'on ne peut plus faire 41 avec deux autres nombres, (puiſque 23 & 21 qui reſtent à conſiderer font plus de 41) il faut changer 28, & mettre avec 34 le ſuivant 27.

On aura donc 34 & 27, dont la ſomme eſt 61, qui ôtée de 103, reſte 42, qu'il faut trouver en deux nombres, tous deux moindres que 27; car ſi l'un des deux nombres étoit plus grand que 27, & ſi c'étoit par exemple 28 & 14, ce ſeroit refaire la même choſe qu'on a ci-devant conſiderée & trouvée impoſſible, car on auroit les quatre mêmes nombres qu'on a eus auparavant, ſçavoir 34, 28, 27, 14.

Or les 42 qui reſtent ne ſe peuvent faire que par 26 & 16, car 25 & 21, ou 23 & 21 qui reſtent, ſont trop grands.

On aura donc 34, 27, 26, 16 pour la premiere ligne A B.

Pour la ſeconde B C, qui doit avoir 68, je prens premierement 32 & 28, qui enſemble font 60; mais parce qu'il faudroit faire 8 en deux nombres, il en faut mettre un autre avec 32, & afin de les avoir ſéparez de ceux de la premiere ligne, je les écrirai à part avec leurs complémens.

103			68						
34	3		28	9		32	28	25	23
27	10		23	14		5	9	12	14
26	11		12	25					
16	21		5	32					

Je joindrai donc 32 à 25, la ſomme eſt 57, qui ôtée de 68, reſte 11, qu'on ne peut faire en deux nombres, puiſque les deux moindres qui reſtent, ſçavoir 9 & 14, font plus de 11.

On aſſemblera après 32 & 23, la ſomme eſt 55, qui ôtée de 68, reſte 13; mais 9 & 12 qui reſtent font plus de 13.

Enfin on ajoûtera 32 à 14, la ſomme eſt 46, qui ôtée de 68, reſte 22; mais 12 & 9 qui reſtent ne font que 21, & ainſi on ne peut mettre 32 en cette ligne B C, puiſque parcourant tous les nombres avec 32, on ne peut trouver 68.

Il faut donc changer 32, & prendre le nombre ſuivant qui eſt 28, lequel étant joint avec 25 fait 53, qui étant ôtez de 68, reſte 15, qu'on ne peut faire avec les nombres ſuivans, puiſque les deux moindres 5 & 14 font plus de 15.

Après on ajoûtera 28 à 23 : la ſomme eſt 51, qui ôtée de 68, reſte de 17, qui ſe fait avec les deux nombres qui reſtent, ſçavoir avec 12 & 5.

On aura donc par ce moyen la table parfaite, car la premiere ligne A B ſera 34, 27, 26, 16, près deſquels nombres je mets leurs complémens 3, 10, 11, 21, qui doivent faire la ligne D C de la figure qui eſt ci-devant à la page 250, & qui eſt oppoſée à A B, & on mettra les nombres & les complémens vis-à-vis l'un de l'autre, comme on voit en la figure, en laquelle 3 eſt vis-à-vis de 34, 10 vis-à-vis de 27, & ainſi des autres.

La ligne B C ſe fera des nombres 28, 23, 12, 5, & la ligne A D qui lui eſt oppoſée ſe fera des complémens de

ces nombres, ſçavoir de 9, 14, 25, 32, qu'on voit en l'autre page vis-à-vis de 28, 23, 12, 5, & les autres, ſçavoir 9, 14, 25, 32 ſe doivent mettre auſſi chacun vis-à-vis de leurs complémens, ſçavoir 9 vis-à-vis de 28, 14 vis-à-vis de 23, &c.

On peut paſſer outre à examiner ſi on ne peut point faire cette table de 6 d'une autre façon, les coins demeurans comme ils ſont, & en leur même ſituation.

Premierement, il eſt bien certain que la ligne A B demeurant telle qu'elle eſt, on ne peut pas faire la ligne B C d'une autre ſorte, parce que ſi au lieu de 28 & 23, on prenoit 28 & 14, ou 15 & 23, les nombres qui reſteroient ne ſeroient pas ſuffiſans d'achever 68, parce que neceſſairement ils ſeroient moindres que ceux qui reſtent lorſqu'on prend 28 & 23.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103			68	
34	3		28	9
25	12		23	14
23	14		12	25
21	16		5	32

Il faut donc changer la ligne A B, dont les quatre nombres qui ſont entre les coins 1 & 7, doivent faire enſemble 103.

Et parce que l'on a déja pris 34 & 27, & qu'on ne peut faire les 42 qui reſtent par d'autres nombres que par 26 & 16, qui ont déja été employez, il faut changer 27, & prendre 26 avec 34, qui enſemble font 60, qui ôtez de 103, reſte 43, qu'on ne peut faire avec deux des nombres qui reſtent, & qui ſoient moindres que 26.

Il faut donc paſſer plus outre, & joindre 25 à 34, dont la ſomme eſt 59, qui ôtée de 103, reſte 44 qui ſe peuvent faire avec 23 & 21. La ligne A B ſera donc 34, 25, 23, 21.

Et

Et il faudra faire 68 en quatre nombres pour la ligne B C, avec les quatre qui reſtent, 5 9 10 11
& leurs complémens, qui ſont 32 28 27 26

Mais on ne ſçauroit trouver quatre de ces nombres ſelon la régle, qui eſt de ne point mettre un nombre & ſon complément en même ligne, qui faſſent 68, d'où s'enſuit que la ligne A B ne peut pas être compoſée de 34, 25, 23, 21.

Si on veut paſſer outre, on ne pourra plus ajoûter aucun nombre avec 34, car on ne feroit que des répetitions de ce qui a été déja examiné : car ſi après 25 il faut prendre les deux plus grands nombres qui reſtent, ſçavoir 23 & 21 ; ſi on mettoit 23 avec 34, on ne pourroit pas trouver deux nombres moindres que 23, qui fiſſent enſemble ce qu'il faudroit de reſte pour achever 103, ainſi qu'il eſt requis.

Il faut donc abandonner 34, & ſe ſervir de 32, en le comparant aux nombres ſuivans, comme on a fait 34.

Je joins 32 à 28 : la ſomme eſt 60, qui ôtée de 103, reſte 43, qu'on peut faire avec 27 & 16 ſeulement.

La ligne A B aura donc 32, 28, 27, 16 pour les quatre nombres qui ſont entre ſes coins 1, 7.

		103	68
3 5 9 10 11 12 14 16	32 | 5		
34 32 28 27 26 25 23 21	28 | 9		
	27 | 10		
	16 | 21		

Pour faire la ligne B C, qui doit être de 68, ſans les coins, on ſe ſervira des nombres reſtans, qui ſont

34 26 25 23
3 11 12 14

Si on prend 34 & 26, on aura 60, reſtera 8 qu'on ne peut pas faire en deux nombres ; & le même inconvenient arrive à 34 & 25, commeauſſi à 34 & 23, qui enſemble

font 57, qui ôtés de 68, reſte 11, qu'on ne ſçauroit faire avec 11 & 12.

Pareillement ſi on ſe ſert de 34 & 14, la ſomme eſt 48, qui ôtée de 68, reſte 20, qui eſt encore moindre que la ſomme de 11 & 12 qui reſtent.

Il faut donc laiſſer 34, & ſe ſervir de 26, qui étant joint à 25, fait 51, qui ôté de 68, reſte 17, qui ſe peut faire avec 14 & 3.

La ſeconde ligne B C ſera donc de 26, 25, 14, 3.

103			68	
32	5		26	11
28	9		25	12
27	10		14	23
16	21		3	34

On diſpoſera la premiere ligne au-deſſous de 103, & les complémens à côté, & de même la ſeconde ligne au-deſſous de 68, afin de les diſpoſer après en leur place en ce même ordre pour avoir la figure ſuivante, en laquelle la figure interieure de 4 de côté eſt la même que ci-devant.

Si on vouloit paſſer outre à la recherche d'autres figures, il faudroit joindre 32 à 25 : la ſomme eſt 59, qui ôtée de 103, reſte 44, qu'on fera en prenant 23 & 21, & ainſi on auroit pour la premiere ligne 32, 27, 23, 21, mais on ne pourra compoſer la ſeconde ; de ſorte qu'il faut changer la premiere.

A B

1	32	28	27	16	7
11	2	33	31	8	26
12	24	15	17	18	25
23	19	20	22	13	14
34	29	6	4	35	3
30	5	9	10	21	36

D C

Si on joint 32 à 26 ou à 25, on ne pourra faire 103, c'eſt pourquoi il faut laiſſer 32, & conſiderer 28, qui étant

joint à 27, donne 55, qui ôté de 103, reſte 48, qui ſeront faits par 25 & 23. On aura donc pour la premiere ligne 28, 27, 25, 23, mais on ne pourra faire la ſeconde ligne qui doit être de 68, avec les nombres qui reſtent.

Il faudroit donc réformer encore la premiere ligne, ce qui ne ſe peut, parce qu'ayant pris les quatre nombres 28, 27, 25, 23, ſi l'on change quelqu'un des deux premiers 28 & 27, on ne pourra prendre que 26 au lieu de l'un d'eux; mais il faudroit en même temps augmenter 23 ou 25, ce qui ne ſe peut, parce qu'entre les nombres qu'on peut choiſir, & dont on ſe peut ſervir, il n'y a que le même 26 qui ſoit plus grand qu'eux.

Il eſt donc manifeſte, que laiſſant la Table intérieure de 4 en l'état qu'elle eſt, & les coins 1 & 7, avec leurs complémens, on ne peut faire que les deux Tables de 6 cy-devant écrites, qui ſont marquées A B C D, ſi ce n'eſt que l'on veüille conſidérer l'ordre des nombres, chacun demeurant dans la même ligne ſans en ſortir; mais il ſera parlé cy-après de cette variation.

Que ſi on vouloit rechercher plus outre, il faudroit mettre un autre nombre que 7 à l'un des angles, & les ayant tous éprouvez à cet angle, on changeroit auſſi l'angle où l'on a mis 1, mettant à la place le nombre ſuivant qui eſt 3, & ſon complément 34 à l'angle oppoſé; & à l'autre angle qui borne la même ligne, on mettroit le nombre ſuivant 5, puis 7, & les autres.

Exemple d'une Table de 8.

IL faut maintenant donner l'exemple de la fabrique d'une autre Table, ſur laquelle on ſe puiſſe conduire, pour en former d'autres plus grandes, qui ſera celle qui a 8 à chacun de ſes côtez.

J'arrange premierement la moitié des nombres de ſuite, ſçavoir juſques à 32, & leurs complémens au-deſſous, & chaque couple de nombres fera 65, ſçavoir autant que

les deux extrêmes enſemble 64 & 1, & ce 65 eſt la valeur que doivent avoir deux nombres l'un portant l'autre en chaque ligne ; & ainſi le premier quarré qui eſt de 4 aura deux fois 65, qui font 130 ; le ſecond qui a ſix nombres aura 195, ſçavoir trois fois 65 ; & le dernier qui eſt l'enceinte exterieure, & qui a huit nombres en chaque ligne, contiendra 260.

Voici donc les nombres de ſuite ainſi qu'il les faut ranger.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
64 63 62 61 60 59 58 57 56 55 54 53 52 51 50 49

17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
48 47 46 45 44 43 42 41 40 39 38 37 36 35 34 33

Ayant ainſi diſpoſé les nombres, je prens les huit premiers & leurs complémens, ſçavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, deſquels je fais, comme il a été montré cy-devant, la Table ſuivante de 4.

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

Après je prens les dix nombres ſuivans & leurs complémens, pour l'enceinte ſuivante, qui fera le quarré ou Table de 6. Ces nombres ſont,

9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
56 55 54 53 52 51 50 49 48 47

Avec ces nombres on fera la derniere enceinte de la Table de 6, par quelqu'une des façons cy-devant déduites.

Ou bien on prendra une des Tables de 6 qui ſont cy-devant ; par exemple, la premiere qui eſt en la page 241, qui eſt repetée ici.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Ayant cette Table, je remarque où ſont les 18 premiers & moindres nombres qui ſont la moitié des nombres de la Table, & les laiſſe en leurs places; mais au lieu des 18 autres, je mets les complémens pris ſur le quarré 64, comme on les a mis cy-devant: mais afin de ne ſe point troubler, on pourra écrire les nombres de la Table de 6, & leurs complémens au-deſſous pris ſur 36, & au-deſſous de ceux-là les complémens pris ſur 64, comme on voit ici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

La premiere ligne contient les nombres qui appartiennent à chacune des deux Tables, tant à celle qu'on prend pour patron, que celle qui fait partie de la Table de 8.

La ſeconde ligne appartient à la Table de 6, qui eſt cy-deſſus, & qui ſert de patron, & contient les complémens de la premiere ligne, & chaque couple de nombres fait 37.

La troiſiéme contient les complémens de la premiere ligne, & appartient à la Table de 6, qui fait partie de celle de 8, & chaque couple de nombres fait 65.

Cela fait, il faut mettre à part le reſte des nombres juſques à 32, & leurs complémens au-deſſous, comme on voit ici.

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Après on prendra pour les coins de la derniere enceinte les moindres nombres 19 & 20, & leurs complémens 46, 45: ce n'eſt pas pourtant qu'on ne puiſſe prendre d'autres nombres que 19 & 20, car cela eſt viſible, vû que la figure ſe peut faire en beaucoup de façons.

Maintenant je ferai facilement la Table de 6 ſur la précédente, laiſſant les nombres de la premiere ligne au lieu où on les trouvera, & mettant ceux de la troiſiéme ligne à la place de ceux de la ſeconde: & ainſi on aura la figure ſuivante.

19						20
	9	53	54	51	18	10
	16	1	63	62	4	49
	48	60	6	7	57	17
	52	8	58	59	5	13
	15	61	3	2	64	50
	55	12	11	14	47	56
45						46

J'aſſemble 19 & 20, la ſomme eſt 39, que j'ôte de 260, qui eſt la ſomme que doivent faire les nombres de chaque ligne, reſte 221 pour les ſix nombres, qu'il faut mettre entre 19 & 20.

Pareillement j'aſſemble 20 & 46, la ſomme eſt 66, qui ôtez de 260, reſte 194 pour les ſix nombres qui doivent être entre 20 & 46.

On peut voir auſſi quelle doit être la ſomme des ſix nombres, qui ſeront entre 19 & 45, & cette ſomme ſera 196, afin que ſi on trouvoit 196 avant 194 on s'en pût ſervir.

Je fais premierement la ligne 19, 20, & parce que 19, 20, ſont les moindres nombres des coins, je prens des plus grands nombres qui reſtent pour ſuppléer à leur défaut. Je conſidererai donc les quatre plus grands, 44, 43, 42, 41, dont la ſomme eſt de 170: & parce que les ſix nombres doivent valoir enſemble 221, il reſte 51 pour

les deux nombres qui ſont encore à trouver. On prendra donc 25 & 26, qui enſemble font 51 : cette premiere ligne ſera donc 44, 43, 42, 41, 26, 25, entre les coins 19 & 20.

Reſte à trouver les ſix nombres qu'il faut à la ligne qui a 20 & 46 à ſes extremitez, leſquels ſix nombres doivent faire enſemble 194, & les ſix nombres de la ligne oppoſée, dont les extremitez ſont 19, 45, doivent faire enſemble 196, leſquels nombres on doit choiſir parmi les ſuivans,

27 28 29 30 31 32
38 37 36 35 34 33

Je diviſe 194 par ſix, pour voir ce que doivent avoir les nombres l'un portant l'autre : je trouve 32, & reſte 2; d'où s'enſuit que les nombres pris deux à deux doivent faire 64, mais l'un des couples doit faire 66, ainſi on aura deux couples de nombres de 64 chacun, & un couple de 66, qui font les ſix nombres, car on ne peut pas faire deux couples de 65 par exemple, & un de 64, parce qu'il eſt impoſſible de faire 65 en deux nombres, ſi on ne prend les deux, qui ſont complémens l'un de l'autre; ce qui eſt directement contre la principale & generale regle, qui eſt,

Que jamais dans la conſtruction qu'on donne ici, on ne doit mettre en même ligne deux nombres qui ſoient complémens l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, qui étant joints enſemble faſſent autant que les deux extrêmes enſemble, qui ſont ici 64 & 1.

On cherchera donc deux couples de nombres qui faſſent 64, & un couple qui faſſe 66, on aura 33, 31; 35, 29, & 38 28. Les 37 & 27 font 64; mais parce qu'un des couples doit avoir deux de plus, on prend 38 au lieu de 37, & 28 au lieu de 27.

Les ſix nombres ſeront donc 28, 29, 31, 33, 35, 38, qu'il faut mettre entre 20, 46, & les ſix autres qu'il faut

mettre en la ligne oppoſée, entre 19, 45, ſont leurs complémens, ſçavoir 37, 36, 34, 32, 30, 27, qui ſeront diſpoſez ſelon cet ordre, en telle ſorte que les complémens ſoient toujours vis-à-vis l'un de l'autre; & ainſi on aura la figure ſuivante.

19	44	43	42	41	26	25	20
37	9	53	54	51	18	10	28
36	16	1	63	62	4	49	29
34	48	60	6	7	57	17	31
32	52	8	58	59	5	13	33
30	15	61	3	2	64	50	35
27	55	12	11	14	47	56	38
45	21	22	23	24	39	40	46

On pourra encore faire ces lignes d'une autre ſorte; ſçavoir, prenant 34, 32 pour le couple qui doit faire 66, & 35, 29; 37, 27 pour les deux autres; & ainſi les ſix nombres qu'il faudroit mettre entre 20 & 46, ſeroient 27, 29, 32, 34, 35, 37.

Et les ſix autres qui doivent être mis entre 19, 45, ſeroient leurs complémens; ſçavoir 38, 36, 33, 31, 30, 28, avec leſquels on aura une autre figure.

20 27 29 32 34 35 37 46 *à la place de* 20 28 29 31 33 35 38 46
& 19 38 36 33 31 30 28 45 *à la place de* 19 37 36 34 32 30 27 45

On pourroit encore faire 194 par d'autres couples, prenant 30 & 36 pour faire 66, & les deux autres couples de 64, qui ſeront 27, 37, & 31, 33, & les ſix nombres qu'on mettra entre 20 & 46, ſeront 27, 30, 31, 33, 36, 37; & entre 19, 45, on mettra leurs complémens 38, 35, 34, 32, 29, 28.

On ſe peut encore ſervir d'autres manieres pour trouver 194, ou 196, ſans conſiderer ni prendre les couples des nombres, ainſi qu'on a fait pour la derniere enceinte des précédentes figures de ſix; ce qui ſeroit trop long à repeter ici, vû même qu'on en donnera des exemples, & qu'on

qu'on s'en ſervira en quelqu'une des lignes de la figure ſuivante.

Exemple d'une Table de 14.

AFin qu'on puiſſe voir toutes les façons de choiſir les nombres pour remplir les lignes des enceintes diverſes de la figure, on donnera encore l'exemple d'une Table de 14.

Et parce qu'en cette méthode-cy il n'y a que trois façons de ranger les nombres, on prendra le quarré de 8, (conſideré comme faiſant partie du quarré de 14) ſur le modele du quarré précédent de 8, & enſuite l'enceinte de 10 ſe fera d'une façon, celle de 12 d'une autre, & l'enceinte exterieure, qui eſt celle de 14, encore d'une autre.

Je mets donc premierement de ſuite les nombres qui doivent remplir les 196 places du quarré, & les diſpoſe en deux lignes; ſçavoir la moitié dans une des lignes, & l'autre moitié qui ſert de complément à la premiere, dans l'autre ligne au-deſſous de la premiere, en telle ſorte que chaque couple de nombres faſſe 197, qui eſt la ſomme des deux nombres extrêmes, comme on voit cy-deſſous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
148	147	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101
97	98										
100	99										

Ces nombres étant ainſi diſpoſez, je prens les 32 premiers, & leurs complémens, pour faire le quarré interieur de 8 en la même façon qu'on a fait le précédent de 8, ou ſi on veut on le fera ſur ſon modele, laiſſant les 32 premiers nombres en la même place qu'ils ſont au précédent; mais pour les nombres qui ſurpaſſent 32, il les faudra changer aux complémens correſpondans pris ſur 196; & afin que cela ſe puiſſe faire plus aiſément & ſans être en danger de prendre un nombre pour un autre, on écrira les 64 nombres de la précédente Table de 8 en deux lignes, qui ſerviront de complément l'une à l'autre; & au-deſſous de cette ſeconde, on en mettra une troiſiéme qui contiendra les 32 premiers complémens de la page précédente, ſçavoir depuis 196 juſques à 165, qui eſt deſſous 32.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
25	26	27	28	29	30	31	32				
40	39	38	37	36	35	34	33				
172	171	170	169	168	167	166	165				

Et laiſſant les nombres de la premiere ligne en même place dans la figure B, qu'on la voit dans la figure A, on mettra dans la figure B ceux de la troiſiéme ligne, aux mêmes places que ceux de la ſeconde ligne ſont dans la figure ſuivante A, comme l'on voit ici.

A

19	44	43	42	41	26	25	20	19	176	175	174	173	26	25	20
38	9	53	54	51	18	10	27	170	9	185	186	183	18	10	27
36	16	1	63	62	4	49	29	168	16	1	195	194	4	181	29
33	48	60	6	7	57	17	32	165	180	192	6	7	189	17	32
31	52	8	58	59	5	13	34	31	184	8	190	191	5	13	166
30	15	61	3	2	64	50	35	30	15	193	3	2	196	182	167
28	55	12	11	14	47	56	37	28	187	12	11	14	179	188	169
45	21	22	23	24	39	40	46	177	21	22	23	24	171	172	178

B

Pour avoir plus de facilité à faire ces Tables, il faut mêler les nombres le moins qu'on peut, c'eſt-à-dire les prendre de ſuite autant que faire ſe pourra. Par exemple, le plus grand d'entre les moindres nombres de la Table précédente B, eſt 32; or on appelle les moindres nombres ceux de la premiere ligne, ſçavoir depuis 1, juſques à 98, & les grands nombres, ceux de la ſeconde ligne qui ſont les complémens des premiers, depuis 99, juſques 196 incluſivement.

Je prens donc 33 & 34, & leurs complémens, pour les angles de la figure de 10, qui entoure la précédente de 8; & parce qu'entre les angles de chaque ligne de l'enceinte de 10, il y a huit nombres, je prens les ſeize nombres qui ſuivent 34, & leurs complémens, pour deux lignes prochaines, & qui ſont un des angles de la figure, & pour les deux autres lignes qui leur ſont oppoſées. Ces nombres ſont,

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147

Je prens après les deux nombres ſuivans 51 & 52, & leurs complémens, pour les angles de la ſuivante enceinte de 12, & les vingt nombres ſuivans, & leurs complémens pour les lignes.

Enfin on prendra le reſte des nombres pour la derniere enceinte: ce n'eſt pas qu'il faille neceſſairement ſuivre cet ordre; car on peut entremêler les nombres comme on veut, & en prendre au commencement, au milieu, & à la fin pour une même ligne: mais on trouvera plus de facilité en ſuivant l'ordre précédent.

Or voici les trois voyes dont on ſe pourra ſervir pour parfaire les lignes, après que les coins ſont remplis; mais avant tout, il faut obſerver ce qui eſt commun à toutes ces voyes, & ce qui ſe doit pratiquer auparavant.

Je ſuppoſe donc premierement, que les nombres ſoient aux angles de la figure, & leurs complémens aux angles oppoſez, comme on voit ici, où 164 complément de 33, eſt oppoſé à 33, & 163 complément de 34, eſt oppoſé à 34.

33 34 163 164

Cela fait, je conſidére ce que tous les dix nombres de l'enceinte doivent faire enſemble; & pour trouver cette ſomme, on remarquera que deux nombres l'un portant l'autre doivent faire 197, & cela doit être dans toutes les lignes de chaque enceinte, lequel 197 eſt la ſomme de 196 & 1, qui ſont les deux extrêmes de tous les nombres qui compoſent la figure de 14.

Or ſi chaque couple de nombres doit faire 197, les dix nombres, qui ſont cinq couples, feront 985, ſçavoir cinq fois 197. Puis donc que chaque ligne doit avoir 985, pour ſçavoir quelle ſomme doivent faire les huit nombres qu'il faut mettre entre 33 & 34, il faut ôter de 985 la ſomme de 33 & 34, qui eſt 67, & il reſtera 918 pour les huit nombres.

Semblablement j'ôte de 985 la ſomme de 34 & 164, qui eſt 198, reſtera 787 pour les huit nombres qu'il faut mettre entre 34 & 164; & cette opération doit être faite à chaque enceinte après que les angles ſont poſez.

Pour les deux lignes oppoſées, ſçavoir 163, 164, ou 33, 163, il ne s'en faut pas mettre en peine; car leurs oppoſées étant faites, neceſſairement elles le ſeront auſſi en y mettant les complémens de leurs oppoſées. Il eſt vrai que pour l'opération précédente, qui ſert à trouver combien les nombres qu'on doit mettre entre les angles doivent faire enſemble, on ſe peut ſervir de deux telles lignes qu'on voudra, pourvû qu'elles ne ſoient pas oppoſées l'une à l'autre. Par exemple, au lieu d'ôter de 985 la ſomme de 33 & 34, on pourroit ôter la ſomme de 163 & 164; & au lieu de la ſomme de 34 & 164, on pourroit prendre celle de 33 & 163, car cela eſt indifferent.

La premiere méthode de trouver les nombres de chaque ligne ſert pour avoir toutes les façons poſſibles de faire & remplir la ligne avec les nombres donnez; & à cauſe que par cette méthode on compare chaque nombre avec tous les autres, il s'enſuit qu'on ne doit pas s'en ſervir lorſqu'il y a beaucoup de nombres en la ligne, parce que cela ſeroit trop long, mais on s'en ſervira utilement lorſqu'il y a peu de nombres; c'eſt pourquoi nous la prendrons ici pour remplir les lignes de l'enceinte de 10, en chacune deſquelles lignes il y a huit nombres, ſans les coins qui ſont 33, 34, & leurs complémens 164, 163.

Les huit nombres d'une des lignes, ſçavoir de celle qui eſt entre 34 & 33, doivent faire enſemble 918, qu'il faut mettre à part au-deſſous de 34, 33, & les nombres qui doivent être mis entre 34 & 164, feront enſemble 787 que je mets auſſi à part afin de ne rien confondre.

34 33	34 164
918	787

Les nombres des deux lignes & leurs complémens, ſont

35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
162 161 160 159 158 157 156 155 154 153 152 151 150 149 148 147

Pour faire 918, parce que le nombre eſt grand, & qu'il doit récompenſer la petiteſſe de 34, 33, je prens les quatre plus grands nombres, ſçavoir 162, 161, 160, 159, qui enſemble font 642, qui ôtez de 918, reſtera 276 pour les quatre nombres reſtans. Pour faire 276, je ne puis pas me ſervir des deux nombres ſuivans 158, 157, parce qu'ils feroient plus de 276, ni même des deux moindres de la ſeconde ligne, ſçavoir de 148, 147, parce qu'ils font auſſi plus de 276. Mais ſi on prenoit les quatre plus grands de la premiere ligne, ſçavoir 47, 48, 49, 50, la ſomme ſeroit moindre que 276, c'eſt pourquoi il faudra prendre un des nombres de la ſeconde ligne, & trois de la premiere. Prenons, par exemple, 158, reſtera 118, mais 118 ne ſe peut faire avec trois nombres de cette ligne; car les trois moindres ſont 40, 41, 42, qui enſemble font 123, qui eſt 5 plus que 118.

Il faut donc diminuer 158. Je prens 155 au lieu de lui, qui ôtez de 276, reſtera 121 qu'il faut faire en trois nombres; ce qui ne ſe peut point encore, non plus qu'avec 157 & 156; mais prenant 154, il reſtera 122, qui ſe feront avec 39, 41, 42.

Et ainſi on pourra éprouver à faire la ligne, en prenant 153, 152, & les autres.

Et pour continuer la recherche des differentes ſortes de lignes qu'on peut faire avec les ſeize nombres, & leurs complémens, je change le dernier des quatre nombres premierement pris, & mets 158 au lieu de 159, & j'aurai 162, 161, 160, 158, qui enſemble font 641, qui ôtez de 918, reſte 277, qu'il faut faire avec quatre nombres, deſquels on a reconnu cy-devant que l'un devoit être de

la ſeconde ligne, & les trois autres de la premiere.

Je prens donc 157, qui ôtez de 277, reſte 120, qu'on ne ſçauroit faire avec trois nombres; car ſi on prend les trois moindres 38, 41, 42, on aura 121. Il faut donc diminuer 157, & prendre 156, qui ôtez de 277, reſtera 121, qu'on fera avec trois nombres, ſçavoir avec 38, 40, 43.

On pourroit continuer cette recherche prenant un autre nombre que 156, puis diminuant encore 158, & revenant après à faire la même choſe à 160, 161, & enfin à 162. Ce qui ſeroit trop long à déduire.

La premiere ligne entre 33 & 34, ſera donc 162, 161, 160, 158, 156, 38, 40, 43.

Pour la ſeconde ligne qui eſt entre 34 & 164, & dont les huit nombres doivent faire enſemble 787, je cherche à la faire comme s'enſuit, avec les nombres qui reſtent; ſçavoir,

42	44	45	46	47	48	49	50
155	153	152	151	150	149	148	147

Parce que la ſomme des angles 14 & 164 eſt 198, qui ne differe que de l'unité de 197, qui eſt la ſomme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faudra prendre quatre nombres de la ligne inferieure, & quatre de la ſuperieure, à telle condition toutefois qu'on prenne une quotité impaire de nombres impairs, afin que la ſomme ſoit impaire, comme eſt 787. Je prendrai donc par exemple 155, 153, 152, 150: la ſomme eſt 610, qui ôtée de 787, reſte 177, qu'on ne peut pas faire avec quatre nombres, car les quatre qui reſtent ſont 46, 48, 49, 50, qui enſemble font 193: & ſi je prens 147 au lieu de 150, la ſomme ſera encore trop petite.

Et parce que la difference de 193 à 177 eſt grande, je diminuë tout à coup 152 de beaucoup, & ſans s'amuſer à prendre 151, ou 150, l'on prendra d'abord les quatre

nombres 155, 153, 148, 147, dont la ſomme eſt 603; qui ôtée de 787, reſte 184; mais les quatre nombres qui reſtent, ſçavoir 45, 46, 47, 48, font 186. Ils ſeront donc trop grands de 2, & ainſi il faudra diminuer 153. Je prens 152 en ſa place, & laiſſe 148 & 147, puiſque 153 n'eſt diminué que de 1.

On aura donc 155, 152, 148, 147, dont la ſomme eſt 602, qui ôtée de 787, reſte 185: les quatre nombres qui reſtent ſont 44, 46, 47, 48, dont la ſomme eſt 185, ainſi qu'il eſt requis. On a donc les nombres qui doivent être entre 34 & 164, qui ſeront 155, 152, 148, 147, 44, 46, 47, 48.

Mais ſi on vouloit chercher plus outre, on diminuëroit encore 152, prenant d'autres nombres que 148 & 147.

Et enfin on diminuëroit le premier nombre 155, prenant 153 en ſa place, & cherchant comme devant, on trouvera que les huit nombres ſuivans 153, 152, 150, 147, 49, 48, 46, 42 étant joints enſemble, font 787.

Je mets donc au-deſſous de 918, les nombres de la ligne 34, 33, cy-devant trouvez; & au-deſſous de 787, ceux de la ligne 34, 164, & leurs complémens à côté, comme on voit ici.

34	33		34	164
918			787	
162	35		153	44
161	36		152	45
160	37		150	47
158	39		147	50
156	41		49	148
43	154		48	149
40	157		46	151
38	159		42	155

Ces nombres étant ainſi diſpoſez, je les range à l'entour

tour de la figure de 8 marquée B en la page 267, entre leurs angles qui ſont marquez au-deſſus d'iceux, & en fais la figure ſuivante de 10.

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151
42.	177	21	22	23	24	171	172	178	155
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163

Mais cette méthode eſt trop longue, quoi qu'elle ſoit de grande commodité aux petites figures, comme de ſix ou huit nombres à chaque côté : toutefois on pourroit choiſir tels nombres pour les angles & pour les lignes qu'on ſe trouveroit ſi embarraſſé, qu'on ſeroit obligé de recourir à cette voye, ſi on ne vouloit point changer les nombres; & c'eſt ici le dernier refuge : car puiſque par cette méthode on trouve toutes les façons de faire les lignes avec les nombres donnez, ſi on la met en pratique, néceſſairement elle découvrira, (ſi on la ſuit de point en point & ſans rien omettre) ſi la ligne ſe peut parfaire avec les nombres dont on ſe veut ſervir.

Il la faudroit auſſi neceſſairement mettre en uſage, ſi on vouloit avoir toutes les façons poſſibles de faire une Table ſans changer les nombres de chaque enceinte.

Maintenant il faut paſſer aux deux autres voyes, par l'une deſquelles on fera l'enceinte de 12, & par l'autre la derniere qui eſt de 14.

Il faut premierement ſçavoir combien chaque ligne doit avoir en l'enceinte de 12; ce qui ſe fait multipliant

197 par 6, le produit ſera 1182, car puiſque chaque couples de nombres, l'un portant l'autre, doit faire 197, les ſix couples, qui ſont douze nombres, feront 1182.

Je choiſis après les deux nombres qu'il faut mettre aux angles; on a pris pour la Table précédente tous les nombres juſques à 50, & leurs complémens; on prendra pour ces deux angles ici les deux nombres ſuivans, ſçavoir 51, 52, & leurs complémens 146, 145, qui ſeront diſpoſez aux angles de la figure, comme on voit ici.

51 52 146 145

J'aſſemble après 51 & 52, la ſomme eſt 103, qui ôtée de 1182, qui eſt la ſomme des douze nombres de la ligne, reſte 1079 pour les dix nombres qui reſtent à mettre entre 51 & 52.

Pareillement j'aſſemble 51 & 145, la ſomme eſt 196, qui ôtée de 1182, reſte 986 pour les dix nombres qui doivent être entre 51 & 145.

Cela fait, je prens les vingt nombres qui ſuivent 52, & leurs complémens, car il en faut dix en chacune des lignes entre les angles.

51 — 52	51 — 145
1079	989

53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
144	143	142	141	140	139	138	137	136	135
63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
134	133	132	131	130	129	128	127	126	125

Seconde méthode. Pour cette enceinte on ſe ſervira de la ſeconde méthode qui eſt la plus facile de toutes, & ſe fait comme s'enſuit.

Je diviſe 1079 par 10, à cauſe que les dix nombres doivent faire 1079; tous enſemble on aura 108 moins 1;

de ſorte que neuf des nombres vaudront 108, & le dixiéme vaudra 107 : (ce qui ſe doit entendre l'un portant l'autre) chaque couple de nombres vaudra donc 216, excepté une qui ne vaudra que 215.

Mais parce qu'il n'y a que deux nombres qui puiſſent faire 216, ſçavoir 144 & 12, il faudra prendre quelques-uns des plus grands nombres, afin que les autres en ſoient d'autant diminuez. Par exemple, on prendra 144 & 143, dont la ſomme eſt 287, qui ôtée de 1079, reſte 792, qui diviſé par 8, à cauſe des huit nombres qui reſtent, on aura 99 : chaque couple de nombres vaudra donc 198, & il y a quatre couples.

On obſervera de faire en ſorte que les nombres qui reſteront pour l'autre ligne, ſoient de ſuite le plus qu'on pourra, car on y trouvera plus de facilité.

On fera aiſément 198 pluſieurs fois, & tant qu'on voudra, comme ſi on prend 142, 56, | 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. |

Mais on le peut encore trouver d'une autre ſorte, prenant des couples de nombres qui vaillent plus de 198, & d'autres qui vaillent d'autant moins, car il arrive par fois qu'on ne peut trouver deux nombres qui faſſent ce qui eſt requis.

Si donc je ne pouvois faire 198 en deux nombres, j'en prendrois deux qui faſſent par exemple 188, ſçavoir 125 & 63, & en échange il en faudroit prendre deux qui fiſſent enſemble 208, comme 142, 66.

Le premier couple vaut 10 moins que 198, & le ſecond vaut 10 plus : je prendrai aprés 126, 64, qui font enſemble 190, qui eſt huit moins que 198; & en échange je prendrai 141, 65, dont la ſomme eſt 206, qui ſurpaſſe 198 de huit.

On aura donc 144, 143, 142, 141, 125, 126, 63, 64, 65, 66, pour les dix nombres qu'il faut mettre entre 51, 52.

Pour la ligne 51, 145, je diviſe 986 par dix, & je trou-

ve 98, & reſte 6; ce qui me montre qu'il y aura ſix nombres qui auront 99 l'un portant l'autre, & quatre qui auront 98.

Il faudra donc trouver trois couples de nombres, dont chacune ſera 198, double de 99, & deux couples de 196 chacune.

Je marque les nombres de la ligne précedente avec une petite ligne ou tiret au-deſſous, & me ſers des dix qui reſtent, qui étant de ſuite en quotité paire, (car il y en a premierement ſix de ſuite, & puis quatre, ce qu'il faut obſerver le plus qu'on peut pour la facilité, ſçavoir que les nombres qui ſuivent ſoient en quotité paire) il ſera facile de trouver des couples de 198 & de 196; les trois couples de 198 ſeront 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. | Les deux couples de 196 ſeront 67, 129, | & 69, 127: on aura donc 140, 138, 136, 129, 127, 69, 67, 62, 60, 58 pour la ligne 51, 145.

Ayant ces nombres, afin de ne ſe point méprendre & de n'être point en danger de les mettre en une ligne autre que celle où ils doivent être mis, & auſſi pour avoir plus en mains leurs complémens, on mettra les nombres de chaque ligne au-deſſous des deux nombres qui ſont aux angles qui la bornent, comme on voit cy-deſſous, & leurs complémens à côté.

51 52		51 145	
1079		986	
144	53	140	57
143	54	138	59
142	55	136	61
141	56	129	68
125	72	127	70
126	71	69	128
63	134	67	130
64	133	62	135
65	132	60	137
66	131	58	139

Puis on diſpoſera ces lignes autour de la figure de dix cy-devant trouvée, & l'on aura la figure ſuivante de douze.

73 74

51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52
140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57
138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59
136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61
129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68
127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70
69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128
67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130
62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135
60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137
58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139
145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146

123 124

Cette méthode eſt la plus facile de toutes, mais il ſeroit aiſé de la découvrir en voyant la figure, ſi l'on n'y apporte un peu d'artifice; ce qui ſe pourra faire en mêlant davantage les nombres.

Par la troiſiéme méthode les figures ſont renduës plus embaraſſées, parce que ſuivant ce qu'elle ordonne, on ne s'étudie pas à prendre les nombres de ſuite, comme on a fait cy-devant; mais on les prend par hazard ſelon qu'ils ſe rencontrent, conſidérant toutefois à peu-près ce qu'il faut pour parfaire la ligne.

On fera la même opération qu'aux précédentes, pour ſçavoir combien chaque ligne doit avoir, ſçavoir multipliant 197 par 7; (car 197 eſt la ſomme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre par toute la figure, & y ayant quatorze nombres en chaque ligne de cette derniere enceinte, on aura ſept couples) ſi donc on multiplie 197 par 7, le produit ſera 1379, qui eſt la ſomme des quatorze nombres de chaque ligne de la derniere enceinte.

Je prendrai donc comme cy-devant, pour les angles deux nombres qui s'entresuivent ; par exemple, les deux moindres de ceux qui restent, sçavoir 73, 74, & leurs complémens 124, 123, & je les disposerai comme on voit ici, & ainsi qu'ils doivent être dans la figure, & qu'ils seront après appliquez sur les angles de la figure de douze, comme l'on voit de l'autre part.

73 74

J'assemble après 73 & 74 : la somme est 147, qui ôtée de 1379, (qui est la somme des quatorze nombres de chaque ligne) reste 1232 pour les douze nombres qu'il faudra mettre entre 73 & 74.

123 124

Je prens aussi la somme de 73 & 123, qui est 196, qui ôtée de 1379, reste 1183 pour les douze nombres qui doivent être mis entre 73 & 123.

On disposera après de suite les vingt-quatre nombres qu'il faut mettre dans ces lignes, & leurs complémens.

75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
122	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111
87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Je dispose comme cy-devant les nombres qu'il faut pour chaque ligne, lesquels on vient de trouver.

Pour remplir ces lignes par la troisiéme méthode : Par exemple, la ligne qui doit avoir 1232,

73	74	73	123
123		1183	

je vois que les nombres des angles sont tous deux petits, c'est pourquoi il faudra se récompenser aux douze nombres qu'on cherche, & pour cet effet prendre davantage des nombres de la seconde ligne, que de ceux de la pre-

miere ; & ſur tout obſerver, que les nombres impairs qu'on prendra ſoient en quotité paire, afin qu'ils puiſſent faire un nombre pair tel qu'eſt 1232. Je prens donc par exemple les nombres qui s'enſuivent, que je mets au-deſſous de 1232.

1232		
—122	75	
—121	76	
—120	77	
—78	119	
—79	118	
117		
116		
115		
83		
113		
—85	112	
111		
1260		

La ſomme de ces nombres eſt 1260, mais il ne falloit trouver que 1232, qui ôtée de 1260, reſte 28. Il faut donc diminuer ces nombres de 28, ce qui ſe peut faire en diverſes façons, comme mettant en la place de quelqu'un des nombres qui ſont ici, un nombre qui ſoit moindre de 28., pourvû que ce nombre ne ſoit point déja employé dans la ligne, ni ſon complément auſſi. Par exemple, ſi au lieu de 122 on prenoit 94, ou bien on peut faire cette déduction en deux nombres ou plus ; ainſi au lieu de 116 on peut prendre 103, & 100 au lieu de 115 : ce qui diminuëroit les nombres de 28.

Mais il y a encore une autre méthode, par laquelle on change les nombres de la ligne, en d'autres qui ont leurs complémens employez dans la même ligne ; mais en ce cas il ne faut diminuër ou augmenter le nombre que de la moitié, comme ici de 14, parce qu'on ſera obligé de changer auſſi les complémens ; ce qui fait doubler la correction, laquelle par conſéquent ne ſe doit faire que de la moitié, comme on verra incontinent.

On ſe peut auſſi ſervir de ces deux voyes enſemble, pour corriger le défaut ou excès des nombres.

Nous choiſirons ici la ſeconde méthode pour corriger l'excès de 28, lequel doit être réduit à la moitié, ſçavoir 14, comme il a été dit. Pour changer 122, je cherche dans la ligne quelque petit nombre dont le complé-

Digitized by Google

ment ſoit beaucoup moindre ; par exemple 85, dont le complément eſt 112, qui eſt moindre de 10 que 122. Je mets donc 112 à la place de 85, & de même à la place de 122 je mets ſon complément 75, comme on voit à côté de la ligne ; & ainſi on aura 20 de diminution, au lieu de 10, car on ôte 122, & on met 112 ; comme auſſi on ôte 85, & on met 75 à ſa place.

Reſte donc à diminuër les nombres de 4, pour achever 14.

Parce que les nombres qu'on a pris ſont eux, ou leurs complémens tous de ſuite (car le complément de 78 eſt 119, qui précede 120, & ainſi des autres) il ſera facile de voir de combien les complémens des nombres de la ligne ſeront moindres que celui avec lequel on les voudra comparer. Par exemple, le complément de 79 ſera moindre de trois que 121, parce que 79 eſt le troiſiéme nombre après 121, & pour la même raiſon le complément de 78 ſera moindre de 1, que 120. Or 3 & 1 font 4, qui eſt la correction requiſe ; je mets donc au lieu de 121, 120, 78, 79, leurs complémens ſçavoir 76, 77, 119, 118, comme on voit de l'autre part, où les complémens ſont écrits à côté de leurs nombres, leſquels nombres ſont marquez pour montrer qu'ils ne ſervent plus de rien, & qu'en leur place il faut prendre ceux qui ſont à côté.

Les nombres de cette ligne, dont les angles ſont 73 ; 74, ſeront donc 75, 76, 77, 119, 118, 117, 116, 115, 83, 113, 112, 111, qui font enſemble la ſomme requiſe 1232.

Pour l'autre ligne, dont les angles ſont 73, 123, & qui doit contenir 1183 en ſes douze nombres, je prens les nombres qui reſtent ; ſçavoir,

87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Et parce que les angles 73, 123, valent à peu-près 197,

197, qui eſt la valeur que doit avoir chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faut auſſi que les nombres qu'on employera ſoient à peu-près de cette valeur : mais on prendra garde d'avoir une quotité impaire de nombres impairs, parce que la ſomme des douze nombres, ſçavoir 1183, eſt impaire.

On remarquera auſſi que les nombres qui ſont l'un deſſus l'autre, valant enſemble 197, & n'étant differens l'un de l'autre que de l'unité ; ſi on prend un des nombres de deſſous, avec le ſuivant de la ligne ſuperieure, comme 110, & 88, on aura 1 plus que 197 : mais ſi avec le nombre de deſſous, on prend le précédent de la ligne ſupérieure, comme 109 & 87, on aura 1 moins que 197.

Si donc on veut que les nombres ayent 197 l'un portant l'autre, il faut mêler ces deux façons, & prendre les nombres qu'on voit ici au-deſſous de 1183, qui enſemble font 1181, qui eſt 2 moins qu'il ne faut : d'où s'enſuit qu'il faudra augmenter un des nombres de 1, car ainſi le complément étant augmenté de 1, toute l'augmentation ſera de 2. Or cela ſe peut faire en beaucoup de manieres ; par exemple, mettant 108 au lieu de 107 ; car cela étant, il faudra mettre 90, complément de 107, à la place de 107, & 108, complément de 89, à la place de 89, comme on voit ici ; & ainſi 89 & 107 ſeront chacun augmentez de 1, puiſqu'au lieu d'iceux on aura 90 & 108.

1183	
110	
88	
89	108
107	90
106	
92	
93	
103	
102	
96	
97	
98	

Voici donc les nombres de la ligne qui doit être entre les angles 73, 123, qui ſont 110, 88, 108, 90, 106, 92, 93, 103, 102, 96, 97, 98. On mettra donc, comme on a fait ci-devant, les nombres de ces deux lignes au-deſſous de

leurs angles, & leurs complémens à côté, comme l'on voit ci-après.

73	74			73	123
75	122			110	87
76	121			88	109
77	120			108	89
119	78			90	107
118	79			106	91
117	80			92	105
116	81			93	104
115	82			103	94
83	114			102	95
113	84			96	101
112	85			97	100
111	86			98	99

Cela fait, je les disposé autour de la précédente figure de 12, & on aura la figure de 14 parfaite, comme on la voit cy-après.

73	75	76	77	119	118	117	116	115	83	113	112	111	74
110	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	87
88	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	109
108	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	89
90	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	107
106	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	91
92	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	105
93	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	104
103	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	94
102	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	95
96	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	101
97	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	100
98	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	99
123	122	121	120	78	79	80	81	82	114	84	85	86	124

On pourroit bien faire que la figure auroit à ſes angles quatre nombres de ſuite, ſçavoir 97, 98, 99, 100, qui ſeroient diſpoſez comme on voit cy-après.

La ligne qui doit être entre 97 & 98 auroit 1184 en ſes 12 nombres, & celle qui ſeroit miſe entre 97 & 99 aura 1183, on trouvera que la premiere doit avoir deux couples de 196 chacun, & quatre de 198, & la ſeconde devroit avoir deux couples de 196, trois de 198, & un de 197; mais parce qu'on ne peut faire aucun couple de 197, à cauſe qu'il faudroit prendre deux nombres qui ſeroient complément l'un de l'autre, au lieu du couple de 197, j'en prendrai un de 198, & en récompenſe au lieu d'un de 196, j'en prendrai un de 195; on en aura donc quatre de 198, un de 196, & un de 195. Les nombres dont il ſe faut ſervir ſont les ſuivans.

97 98

99 100

73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101

1183

112
86
110
88
108
90
106
92 105
93
103 94
95
96

La ligne qui doit être entre 97 & 98, & qui vaut 1184, ſe fera aiſément, prenant 73, 123, | 75, 121, pour les deux couples de 196; | & 120, 78, | 118, 80, | 116, 82, | 114, 84, | pour les quatre couples de 198

L'autre ligne qui doit être entre 97 & 99, ne ſe fera pas ſi aiſément, parce que la ſomme des nombres eſt impaire. On prendra 112, 86, | 110, 88, | 108, 90, | 106, 92, pour les quatre couples de 198, & 93, 103 pour le couple de 196; mais

on ne ſçauroit faire 195 avec les nombres qui reſtent. J'en prens donc deux au haſard, en ſorte toutefois que l'un d'eux ſoit pair, & l'autre impair, afin que leur ſomme ſoit impaire, comme l'eſt 195. Par exemple, je prens 95, 96, dont la ſomme eſt 191, qui eſt moindre de 4 que 195. Il faut donc augmenter un des nombres de 2, & pour le faire, j'en choiſis un, qui étant augmenté de 2, ne ſe trouve point dans la ligne, mais que ſon complément y ſoit: par exemple, je change 92, parce que 94 qui le ſurpaſſe de 2, n'eſt pas dans la ligne, mais ſon complément 103 s'y trouve.

Je mets donc au lieu de 92, ſon complément 105, & au lieu de 103, ſon complément 94, & on aura les douze nombres de cette ligne. Je les diſpoſe après comme l'on voit ici, & leurs complémens après eux.

97	98			97	99	
73		124		112		85
123		74		86		111
75		122		110		87
121		76		88		109
120		77		108		89
78		119		90		107
118		79		106		91
80		117		105		92
116		81		93		104
82		115		94		103
114		83		95		102
84		113		96		101

Je mets donc ces quatre angles & ces quatre lignes en la diſpoſition que l'on voit dans la page qui ſuit autour de la figure de 12, avec laquelle on pourra remplir l'eſpace vuide.

97	73	123	75	121	120	78	118	80	116	82	114	84	98
112													85
86													111
110													87
88													109
108													89
90													107
106													91
105													92
93													104
94													103
95													102
96													101
99	124	74	122	76	77	119	79	117	81	115	83	113	100

Il faut remarquer, qu'avec la méthode dont on s'eſt ſervi pour faire cette figure, on pourra conſtruire les autres figures interieures, comme de 12, 10, 8 ou 6, & par la même façon qu'on a fait ci-devant celle de 8 qui eſt au-dedans de celle de 14, ſe ſervant d'une autre de 8 qui ne dépend que d'elle-même, & dont le plus grand nombre eſt 64. Or ce qui fait que les figures inferieures ſe peuvent conſtruire de celle-ci, & ſes ſemblables, eſt que les nombres & leurs complémens vont de ſuite dans toutes les enceintes des figures, & n'anticipent point ſur les nombres

deſtinez pour les figures ſuivantes. Ainſi en la Table de 6 compriſe dans celle de 14, les 36 nombres ſont les 18 moindres, & leurs complémens pris, eu égard à 196.

En la Table de 8, les 64 nombres ſont les 32 moindres, & leurs complémens pris ſur 196.

En celle de 10, les 100 nombres ſont les 50 moindres, & leurs complémens.

Et en celle de 12, les 144 nombres ſont les 72 moindres, & leurs complémens pris toûjours ſur 196.

Mais pour faire de la précedente Table de 14 une figure moindre: par exemple, celle de 10 en laquelle le plus grand nombre ſoit 100, il faut laiſſer les 50 premiers & moindres nombres en la diſpoſition qu'on les trouvera en la Table de 10, faiſant partie de celle de 14; & pour les autres 50 qui ſont les complémens des 50 premiers, au lieu qu'en la Table de 10 qui fait partie de celle de 14, on les a pris ſur 196, il ne les faudra prendre que ſur 100: & afin de ne ſe point tromper, & de ne prendre point un nom pour un autre, on écrira les 50 premiers nombres, ſçavoir 1, 2, 3, 4, &c. & au deſſous dans une ſeconde ligne, leurs complémens pris ſur 196, comme ils ſont ci-devant; & dans une troiſiéme ligne au-deſſous, on mettra les complémens des mêmes nombres de la premiere ligne pris ſur 100, comme on voit ici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
49	50										
148	147										
52	51										

A

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151
42	177	21	22	23	24	171	172	178	155
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163

B

34	66	65	64	62	60	43	40	38	33
57	19	80	79	78	77	26	25	20	44
56	74	9	89	90	87	18	10	27	45
54	72	16	1	99	98	4	85	29	47
51	69	84	96	6	7	93	17	32	50
49	31	88	8	94	95	5	13	70	52
48	30	15	97	3	2	100	86	71	53
46	28	91	12	11	14	83	92	73	55
42	81	21	22	23	24	75	76	82	59
68	35	36	37	39	41	58	61	63	67

ceinte de 6, & ainſi continuant juſques à la derniere enceinte.

Par ce moyen la Table de 4 contiendroit les nombres ſuivans.

98 97 96 95 94 93 92 91
99 100 101 102 103 104 105 106

L'enceinte de la Table de 6 contiendra,

90 89 88 87 86 85 84 83 82 81
107 108 109 110 111 112 113 114 115 116

Celle de la Table de 8 contiendroit,

80 79 78 77 76 75 74 73 72 71 70 69
117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128

68 67
129 130

Celle de 10 auroit,

66 65 64 63 62 61 60 59 58 57 56 55
131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142

54 53 52 51 50 49
143 144 145 146 147 148

Celle de 12 contiendroit

48 47 46 45 44 43 42 41 40 39 38 37
149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160

36 35 34 33 32 31 30 29 28 27
161 162 163 164 165 166 167 168 169 170

Enfin la derniere enceinte de 14 contiendroit le reſte des nombres, qui eſt,

26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15
171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182

14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3
183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194

2 1
195 196

Et la figure étant disposée selon la méthode dont il a été parlé ci-devant, on aura celle qui suit.

195 171 25 180 23 179 21 178 24 175 16 14 177 1
3 28 31 32 164 163 162 161 160 159 48 47 27 194
189 30 49 133 66 137 65 136 54 135 63 147 167 8
13 39 146 129 77 118 70 121 71 72 130 51 158 184
4 44 144 73 116 85 110 89 109 82 124 53 153 193
15 40 58 78 84 103 93 92 106 113 119 139 157 182
185 156 56 128 86 98 100 101 95 111 69 141 41 12
7 155 138 74 83 102 96 97 99 114 123 59 42 190
187 154 57 117 107 91 105 104 94 90 80 140 43 10
6 168 142 122 115 112 87 108 88 81 75 55 29 191
186 152 145 67 120 79 127 76 126 125 68 52 45 11
188 46 50 64 131 60 132 61 143 62 134 148 151 9
5 170 166 165 33 34 35 36 37 38 149 150 169 192
196 26 172 17 174 18 176 19 173 22 181 183 20 2

DE L'ATTACHEMENT DES FIGURES partiales & interieures.

EN la façon précedente de faire les figures, celles qui sont au-dedans sont en quelque façon détachées, ou plutôt sont capables d'être détachées l'une d'avec l'autre, ainsi qu'il a été dit : car si on ôte la premiere enceinte de la précedente figure de 14, la figure de 12 qui restera aura les conditions requises ; pareillement si on ôte deux enceintes, il demeurera une figure de 10, qui aura encore toutes les lignes égales.

Que ſi on ôte trois enceintes, on aura encore la table de 8, avec les mêmes conditions; & ſi on ôte quatre enceintes, on aura la Table de 6, qui ſera encore ſelon les régles: enfin ſi on ôte cinq enceintes, il reſtera la Table de 4 qui aura pareille qualité.

Mais il y a moyen d'attacher les enceintes l'une à l'autre, en telle ſorte que lorſqu'on en ôtera quelqu'une, les autres, ou laquelle on voudra de celles qui reſtent, ne ſoit point ſelon les loix; quoique la figure totale qui eſt ici de 14, demeure toûjours bonne. Ce qui doit toûjours être ſuppoſé, & en ceci il n'y a point de reſtriction; car on choiſit laquelle on veut, pour être bonne, ou mauvaiſe.

Exemple. On pourra faire que la Table entiere de 14 demeurant bonne, celle de 12 ne vaudra rien, mais les autres de 10, 8, 6 & 4, ſeront bonnes.

Ou bien qu'il n'y aura que celle de 10 qui n'ait pas les conditions requiſes, ou que ce ſera celle de 8, 6 ou 4 ſeulement, en laquelle arrivera ce défaut.

On peut faire auſſi qu'il y en aura deux, & leſquelles on voudra, qui n'auront pas les conditions requiſes, comme celles de 12 & de 10, ou de 12 & de 8, ou de 12 & de 6, ou de 12 & de 4.

Ou bien celles de 10 & de 8, de 10 & de 6, ou de 10 & de 4.

Ou celles de 8 & de 6, de 8 & de 4, ou de 6 & de 4.

Comme auſſi on pourra faire que trois de ces figures ne vaudront rien, mais que les autres ſeront bonnes: par exemple, que celles de 12, 10 & 8 ne vaudront rien, ou celles de 12, 10 & 6, ou de 12, 10, & 4, ou de 12, 8, 6, ou de 12, 8, 4, ou de 12, 6, 4, ou de 10, 8, 6, ou de 10, 8, 4, ou de 10, 6, 4, ou enfin de 8, 6 & 4. Les autres étant diſpoſées ſelon les loix.

Pareillement on fera que quatre des Tables interieures ne vaudront rien, & la cinquiéme ſera bonne, & cette cinquiéme ſera laquelle on voudra; ſçavoir celle de 12,

ou celle de 10 & de 8, de 6 ou de 4, où il faut toûjours ſuppoſer que l'exterieure, ou totale, ſoit bonne.

Enfin on peut faire en ſorte que la ſeule figure totale ſera bonne, & qu'aucune des particulieres & interieures n'aura les conditions requiſes.

Cet attachement ſe fait, tranſpoſant deux nombres d'une enceinte, à la place de deux autres équivalens d'une autre enceinte, en telle ſorte que les nombres demeurent en la même ligne ou colomne où chacun d'eux étoit auparavant; de ſorte que pour faire cette tranſmutation ou tranſport, il faut que les nombres ſoient vis-à-vis l'un de l'autre, & s'ils n'y ſont pas, il les y faut mettre, changeant auſſi leurs complémens pour les mettre vis-à-vis de leurs nombres, les laiſſant pourtant dans leur même enceinte, de peur que la figure totale ne ſoit gâtée. On peut voir enſuite des exemples de cela.

On veut faire enſorte qu'en la précedente figure de 14, qui eſt en la page 290, ſi on ôte une enceinte, la figure de 12 qui reſtera ne vaille rien, mais les autres 10, 8 & 6 ſoient bonnes. Je prens deux lignes prochaines & paralleles, l'une de la figure de 14, & l'autre de celle de 12, & mets auſſi leurs complémens vis-à-vis, comme on voit ici. Or il ne faut point comprendre dans ces lignes les nombres qui ſont aux angles.

A	B	C	D
3			194
189	30	167	8
13	39	158	184
4	44	153	193
15	40	157	182
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
186	152	45	11
188	46	151	9
5			192

Premiere Fig.

Les nombres de la colomne D, ſont complémens de ceux de la colomne A, & ceux de la colomne C, ſont complèmens de ceux de la colomne B.

Pour attacher ces deux

figures enſemble, je cherche deux nombres dans la colomne A, égaux à deux de la colomne B, comme s'enſuit.

La ſomme de 3 & de 189, eſt 192; je cherche en B ou en C deux nombres qui faſſent pareillement 192. Prenons 30 pour un des deux nombres, l'autre doit être 162, lequel n'eſt point dans la ligne B. Je prens le ſuivant 39; le reſte pour parvenir à 192 ſeroit 153, qui n'eſt point en B; prenant 44, il faudroit avoir 148: & enfin prenant 40, le reſte ſera 152 qui ſe trouve en B; on aura donc 40 & 152 qui enſemble font autant que 3 & 189.

Mais parce que 3 & 189 ne ſont pas vis-à-vis de 40 & 152, il les y faut mettre en plaçant 3 à la place de 15, & enſuite 15 à la place de 3; & par même moyen 194, complément de 3, en la colomne D, en la place de 182, complément de 15, parce que 15 étoit vis-à-vis de l'un des nombres de la ligne B, ſçavoir de 40.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
3	40	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
189	152	45	8
188	46	151	9
5			192

Seconde Fig.

Semblablement je fais un échange de place entre 189, & ſon complément 8 avec 186, & ſon complément 11,

parce que 186 eſt vis-à-vis de l'autre nombre 152 : on aura donc 3, 189, vis-àvis de 40, 152, comme on voit en la ſeconde Table.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
40	3	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
152	189	45	8
188	46	151	9
5			192

Troiſiéme Fig.

Maintenant pour faire l'attachement, je mets 3 à la place de 40 qui eſt vis-à-vis, & 189 à la place de 152 ; & cette tranſpoſition étant faite, ſi on ôtoit la premiere enceinte de la figure en laquelle les lignes ſeroient diſpoſées ſelon la ſuite des nombres contenus aux colomnes A, B, C, D, de la troiſiéme figure, la Table de 12 n'auroit pas ſes lignes égales, mais bien celles de 10 ; 8, 6, & 4.

Il faut remarquer, qu'à cette ſeconde tranſpoſition on ne touche point aux colomnes C, D où ſont les complémens.

Par ce changement, la figure entiere de 14 ne reçoit aucun dommage, puiſque les lignes diſpoſées ſelon la ſuite A, B, C, D, ne changent point de nombres, mais retiennent toûjours les mêmes; & les colomnes qui vont de haut en bas changent bien de nombres, mais en leurs places,

elles en reçoivent d'équivalens. Par exemple, la colomne A, au lieu de 3, 189 qu'elle avoit, reçoit 40, 152, qui valent autant : mais ſi on prend la figure de 12 toute ſeule, il n'en ira pas ainſi ; car encore que la colomne B, à la prendre de haut en bas, ne reçoive aucun dommage, il n'en eſt pas de même aux deux lignes qui vont ſelon la ſuite A, B, C, D, car en celle où ſont 3, 157, on a mis 3 tout ſeul à la place de 40, puiſque la ligne de la Table de 12 ne commence qu'en 40 ; d'où s'enſuit que cette ligne ſera trop petite de 37 ; & en la ligne 189, 45, on a mis 189 à la place de 152, & ainſi elle ſera trop grande de 37.

Pour les autres figures de 10, 8, 6 & 4, elles ne reçoivent aucun changement, parce qu'on n'y a point touché.

A	B
30	
39	146
44	144
40	58
156	56
155	138
154	57
168	142
152	145
46	

On peut prendre, ſi on veut, trois nombres ou plus dans la colomne A, & en choiſir autant d'autres, dont la ſomme ſoit égale dans la colomne B, ou dans ſon oppoſée C, & les tranſpoſer comme devant.

On auroit pû prendre 41, 151 dans la colomne C de la premiere figure, pour faire 192. De même, ſi on avoit pris 3, 188 dans la colomne A, qui font 191, on trouveroit 39, 152 dans la colomne B, qui font 191. Enfin on peut trouver ces égalitez en beaucoup de manieres.

Si on vouloit gâter la figure de 10 ſeulement, il faudroit tranſpoſer des nombres de l'enceinte de la figure de 12, à la place d'autres nombres équivalens de la figure de 10, & prendre leurs lignes ou colomnes comme devant, & comme on les voit ici.

Ainſi ayant trouvé que 44 & 155 de la colomne A en la Table précedente, ſont égaux à 57, 142 de la colomne B, après avoir mis 44, 155 vis-à-vis de 57, 142, comme devant, & pareillement leurs complémens qui ſont en la colomne oppoſée de la Table, je les tranſpoſe d'une co-

lomne en l'autre, mettant 44, 155 à la place de 57, 142, & on les aura en la façon qu'ils ſont ici.

A	
30	
39	146
154	144
40	58
156	56
168	138
57	44
142	155
152	145
46	

Et ſi on les applique à la figure de 14 en cette diſpoſition, & qu'on en ôte deux enceintes, la figure de 10 qui reſtera ne ſera pas bonne; mais quelqu'autres enceintes qu'on puiſſe ôter, ce qui reſtera ne laiſſera pas d'être bon. On auroit pû prendre 30, 168, la ſomme eſt 198; leurs égaux dans la colomne B, ſont 56, 142, ou bien 39, 156, auſquels ſont égaux 138, 57 en l'autre colomne, ou bien 39, 155, & on aura 56, 138, qui valent autant, comme auſſi 44, 156 font autant que 144, 56, & que 58, 142, & 44, 155 font autant que 57, 142, &c.

On fera la même choſe des autres enceintes; car ſi on vouloit que la Table de 8 toute ſeule ne valût rien, on mêleroit l'enceinte de 8 avec la précedente qui eſt de 10; & pour gâter la Table de 6, on changera des nombres de ſon enceinte avec celle de 8, &c.

Pour gâter deux Tables de ſuite, il faut mêler les nombres de la moindre, avec ceux de l'enceinte qui les enveloppe toutes deux. Par exemple, pour faire que les Tables de 12 & de 10 ne valent rien, les autres demeurant bonnes, on changera les nombres de l'enceinte de 14, en des équivalens de celle de 10.

Et pour gâter les Tables de 10 & de 8 ſeulement, on changera les nombres de la Table de 8, en ceux de la Table de 12, qui eſt celle qui enveloppe celle de 10.

Toutes les autres diverſitez qu'on pourroit apporter à faire quelques-unes des figures bonnes, & quelqu'autres mauvaiſes, ſe feront en la façon qui a été montrée, changeant toûjours les nombres de la figure qu'on veut gâter, avec la précedente qu'on veut conſerver bonne. Il ſeroit trop long d'apporter des exemples de chaque ſorte, vû même

même que ce qui a été dit peut ſuffire étant bien entendu.

Il y a pluſieurs autres manieres de gâter ou attacher les figures. En voici des exemples.

Je cherche deux nombres aux deux colomnes marquées A de la figure précedente, ſçavoir un en chacune, qui ſoient égaux à deux autres des mêmes lignes : par exemple, 154 & 144 font 298, & pareillement 146 & 152 font 298. Et parce que 154 & 144 ſont vis-à-vis l'un de l'autre, on n'aura que faire d'y toucher; mais pour 152, il le faudra mettre vis-à-vis de 146; ou 146 à la place de 145, vis-à-vis de 152, & la ligne ſera comme on la voit ici; & en même temps auſſi on tranſpoſera le complément de 152 qui eſt en la ligne oppoſée dans la figure précedente de 14, vis-à-vis de 152; & pareillement le complément de 39, parce qu'on a mis 152 en ſa place.

B

30		30	
152	146	154	144
154	144	152	146
40	58	40	58
156	56	156	56
168	138	168	138
57	44	57	44
142	155	142	155
39	145	39	145
46		46	

Cela fait, on mettra 152, 146 à la place de 154, 144, comme on voit en la figure B; & en faiſant ce dernier changement, il ne faut point toucher aux complémens, car c'eſt en cela que conſiſte l'attachement des enceintes l'une à l'autre, ſçavoir à tranſpoſer d'une enceinte à l'autre, ou d'une ligne à l'autre des nombres équivalens, ſans toucher à leurs complémens.

On a encore 142, 56, qui font 198.

On a auſſi 154, 56, qui font 210, & 152, 58 qui font autant.

On peut auſſi changer les nombres qui ſont aux angles. Ainſi en la figure qui a 14 de côté, on pourra mettre 196 à la place de 190: & parce que 196 ſurpaſſe 170 de 26, il faudra trouver dans la colomne 171, 26, entre les nombres 28, 170, qui ſont les angles de la Table de 12, un nombre qui ſurpaſſe de 26 quelqu'un de ceux qui ſont entre 195, 196; tel eſt 39 qui ſurpaſſe 13 de 26, comme auſſi 30 qui ſurpaſſe 4 de 26; & par même moyen il faudroit un nombre entre 170 & 169 de la ligne 5, 192, un nombre qui ſurpaſſât de 26 quelqu'un des nombres qui ſont entre 196 & 2: & parce qu'il ne s'en trouve point, on en cherchera deux entre 170 & 169 qui ſurpaſſe de 26 deux autres de la ligne 196, 2; tels ſont 33 & 35, dont la ſomme eſt 68, qui ſurpaſſent de 26 les nombres 20 & 22, dont la ſomme eſt 42, de même 33 & 34, dont la ſomme eſt 67, ſurpaſſent de 26 les nombres 19 & 22, dont la ſomme eſt 41. Si on ne trouvoit pas deux nombres qui fiſſent l'égalité, on en pourroit prendre trois ou quatre, ou davantage.

On peut faire auſſi des Tables impaires par la méthode précedente, dont on s'eſt ſervi pour faire les paires, comme on peut voir en la Table de 5 qui eſt ici, en laquelle les rélatifs ſont dans les lignes oppoſées, & dans la même diagonale.

1	18	21	22	3
2	12	17	10	24
20	11	13	15	6
19	16	9	14	7
23	8	5	4	25

Or on peut varier cette Table en beaucoup de manieres, à cauſe qu'elle eſt détachée, & que les nombres qui

ſont aux extrémitez des lignes, ou colomnes, ſont complémens l'un de l'autre, (c'eſt-à-dire qu'ils font autant étant joints l'un à l'autre, que les deux nombres extrêmes) ainſi qu'on voit en 2 & 24; 20 & 6; 18 & 8, &c. & pareillement les nombres des angles oppoſez dans les diagonales, comme 1 & 25; 3 & 23. Et pareillement on peut tranſpoſer la Table interieure de 9 toute entiere, c'eſt-à-dire, ſans toucher à l'ordre des nombres, qui ne ſe peut changer, ce qui ſe fait en huit façons: puis conſiderant la premiere colomne de l'enceinte exterieure, on y trouve trois nombres ſans les angles, ſçavoir 2, 20, 19, qui ſe peuvent varier en ſix façons, ſuivant la combinaiſon d'ordre de trois choſes; & pareillement la premiere ligne où ſont les trois nombres 18, 21, 22, ſe peut varier en ſix ſortes. Si donc on multiplie ces trois nombres 8, 6, 6 l'un par l'autre, on aura 288, qui eſt la quantité des changemens & variations qu'on peut donner à cette Table; & ainſi on fera 288 Tables differentes de la précedente.

Pareillement on variera en beaucoup de ſortes une Table de ſix détachée: par exemple celle qui eſt ici.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Car premierement la Table de 4 de côté qui eſt au-dedans ſe peut varier en 880 ſortes, dont chacune ſe peut tranſpoſer en huit façons, qui ſont en tout 7040 changemens, qui ſe feront ſans toucher à l'enceinte exterieure, en laquelle les nombres de la colomne, qui ſont quatre ſans les angles, ſe peuvent varier en vingt-quatre ſortes, ſelon la combinaiſon d'ordre de quatre choſes, & pa-

reillement il y a quatre nombres en la ligne de la même enceinte exterieure, qui ſe varieront auſſi en vingt-quatre façons; & ainſi il faudra multiplier 7040 par vingt-quatre, & le produit encore par vingt-quatre, pour avoir la quantité des Tables qu'on peut faire en variant une ſeule d'entre elles, comme celle qui eſt ici, qui ſeront en tout 4055040 Tables. Or on ne prend que les quatre nombres du milieu de chaque ligne de l'enceinte, ſans toucher aux angles, afin qu'y ayant en la Table quelques nombres qui ne ſoient point remuez, on ait de vrayes variations, & non point des tranſpoſitions de la Table entiere.

Table de 5, dont chacune ſe peut varier en 288. façons.

5	20	17	12	11
24	10	25	4	2
3	7	13	19	23
18	22	1	16	8
15	6	9	14	21

5	18	17	14	11
2	10	25	4	24
23	7	13	19	3
20	22	1	16	6
15	8	9	12	21

6	24	15	12	8
3	10	25	4	23
21	7	13	19	5
17	22	1	16	9
18	2	11	14	20

6	23	17	11	8
24	10	25	4	2
5	7	13	19	21
12	22	1	16	14
18	3	9	15	20

6	24	8	15	12
23	10	25	4	3
5	7	13	19	21
17	22	1	16	9
14	2	18	11	20

9	24	3	18	11
21	10	25	4	5
6	7	13	19	20
14	22	1	16	12
15	2	23	8	17

9	2	23	20	11
21	10	25	4	5
8	7	13	19	18
12	22	1	16	14
15	24	3	6	17

9	21	6	18	11
24	10	25	4	2
3	7	13	19	23
14	22	1	16	12
15	5	20	8	17

1	23	20	17	4
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
22	3	6	9	25

3	25	19	14	4
20	10	24	5	6
9	8	13	18	17
11	21	2	16	15
22	1	7	12	23

3	25	22	9	6
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
20	1	4	17	23

3	25	19	12	6
22	10	24	5	4
9	8	13	18	17
11	21	2	16	15
20	1	7	14	23

4	25	23	6	7
17	10	24	5	9
11	8	13	18	15
14	21	2	16	12
19	1	3	20	22

4	23	17	14	7
25	10	24	5	1
6	8	13	18	20
11	21	2	16	15
19	3	9	12	22

4	25	6	19	21
23	10	24	5	3
9	8	13	18	17
14	21	2	16	12
15	1	20	7	22

4	23	20	7	11
25	10	24	5	1
9	8	13	18	17
12	21	2	16	14
15	3	6	19	22

2	23	20	12	8
9	10	25	4	17
15	7	13	19	11
21	22	1	16	5
18	3	6	14	24

2	23	20	8	12
11	10	25	4	15
17	7	13	19	9
21	22	1	16	5
14	3	6	18	24

2	23	17	11	12
8	10	25	4	18
20	7	13	19	6
21	22	1	16	5
14	3	9	15	24

3	24	18	15	5
9	10	25	4	17
12	7	13	19	14
20	22	1	16	6
21	2	8	11	23

3	24	21	8	9
20	10	25	4	6
11	7	13	19	15
14	22	1	16	12
17	2	5	18	23

3	24	15	14	9
6	10	25	4	20
18	7	13	19	8
21	22	1	16	5
17	2	11	12	23

3	21	18	14	9
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
15	22	1	16	11
17	5	8	12	23

3	24	21	6	11
18	10	25	4	8
17	7	13	19	9
12	22	1	16	14
15	2	5	20	23

3	21	18	12	11
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
17	22	1	16	9
15	6	8	14	23

3	20	17	14	11
24	10	25	4	2
15	7	13	19	21
18	22	1	16	8
15	6	9	12	23

TABLE GENERALE DES QUARREZ DE QUATRE.

β				β				β				β			
1	13	8	12	1	13	12	8	1	13	8	12	1	13	12	8
16	4	9	5	16	4	5	9	16	4	9	5	16	4	5	9
11	7	14	2	7	11	14	2	10	6	15	3	6	10	15	3
6	10	3	15	10	6	3	15	7	11	2	14	11	7	2	14

γ				α				α				γ			
1	14	8	11	1	14	11	8	1	14	7	12	1	14	12	7
15	4	10	5	15	4	5	10	15	4	9	6	15	4	6	9
12	7	13	2	6	9	16	3	10	5	16	3	8	11	13	2
6	9	3	16	12	7	2	13	8	11	2	13	10	5	3	16

δ				δ				α				δ			
1	11	14	8	1	14	11	8	1	14	7	12	1	10	15	8
16	5	4	9	16	5	4	9	16	5	10	3	16	6	3	9
7	12	13	2	7	12	13	2	9	4	15	6	5	11	14	4
10	6	3	15	10	3	6	15	8	11	2	13	12	7	2	13

δ				β				β				β			
1	15	10	8	1	11	8	14	1	11	14	8	1	11	14	8
16	6	3	9	16	6	9	3	16	6	3	9	16	6	3	9
5	11	14	4	13	7	12	2	4	10	15	5	7	13	12	2
12	2	7	13	4	10	5	15	13	7	2	12	10	4	5	15

β

1	11	8	14
16	6	9	3
10	4	15	5
7	13	2	12

γ

1	12	8	13
15	6	10	3
14	7	11	2
4	9	5	16

α

1	12	13	8
15	6	3	10
4	9	16	5
14	7	2	11

γ

1	12	14	7
15	6	4	9
8	13	11	2
10	3	5	16

α

1	12	7	14
15	6	9	4
10	3	16	5
8	13	2	11

β

1	10	8	15
16	7	9	2
13	6	12	3
4	11	5	14

β

1	10	15	8
16	7	2	9
4	11	14	5
13	6	3	12

β

1	10	15	8
16	7	2	9
6	13	12	3
11	4	5	14

β

1	10	8	15
16	7	9	2
11	4	14	5
6	13	3	12

δ

1	12	13	8
16	7	2	9
3	10	15	6
14	5	4	11

δ

1	13	12	8
16	7	2	9
3	10	15	6
14	4	5	11

γ

1	12	8	13
14	7	11	2
15	6	10	3
4	9	5	16

α

1	12	13	8
14	7	2	11
4	9	16	5
15	6	3	10

γ

1	12	15	6
14	7	4	9
8	13	10	3
11	2	5	16

α

1	12	6	15
14	7	9	4
11	2	16	5
8	13	3	10

δ

1	10	7	16
14	8	9	3
15	5	12	2
4	11	6	13

β

1	10	7	16
15	8	9	2
14	5	12	3
4	11	6	13

β

1	11	6	16
14	8	9	3
15	5	12	2
4	10	7	13

γ

1	11	16	6
14	8	3	9
4	10	13	7
15	5	2	12

δ

1	11	6	16
15	8	9	2
14	5	12	3
4	10	7	13

γ	γ	δ	β
1 10 16 7	1 10 16 7	1 10 7 16	1 10 7 16
15 8 2 9	15 8 2 9	12 8 9 5	15 8 9 2
4 11 13 6	6 13 11 4	15 3 14 2	12 3 14 5
14 5 3 12	12 3 5 14	6 13 4 11	6 13 4 11
γ	β	δ	δ
1 12 6 15	1 12 15 6	1 15 12 6	1 11 6 16
13 8 10 3	13 8 3 10	13 8 3 10	12 8 9 5
16 5 11 2	4 9 14 7	4 9 14 7	14 2 15 3
4 9 7 14	16 5 2 11	16 2 5 11	7 13 4 10
β	γ	γ	β
1 11 6 16	1 11 16 6	1 12 7 14	1 12 14 7
14 8 9 3	14 8 3 9	13 8 11 2	13 8 2 11
12 2 15 5	7 13 10 4	16 5 10 3	4 9 15 6
7 13 4 10	12 2 5 15	4 9 6 15	16 5 3 10
δ	δ	δ	δ
1 13 4 16	1 7 10 16	1 7 10 16	1 7 10 16
14 8 9 3	14 9 8 3	15 9 8 2	12 9 8 5
12 2 15 5	15 6 11 2	14 6 11 3	15 4 13 2
7 11 6 10	4 12 5 13	4 12 5 13	6 14 3 11
δ	δ	δ	δ
1 7 10 16	1 12 15 6	1 12 5 16	1 12 5 16
15 9 8 2	14 9 4 7	14 9 8 3	15 9 8 2
12 4 13 5	3 8 13 10	15 6 11 2	14 6 11 3
6 14 3 11	16 5 2 11	4 7 10 13	4 7 10 13

δ

1	14	3	16
15	9	8	2
12	4	13	5
6	7	10	11

δ

1	6	12	15
16	9	7	2
13	8	10	3
4	11	5	14

δ

1	12	13	8
16	9	4	5
2	7	14	11
15	6	3	10

δ

1	12	6	15
16	9	7	2
13	8	10	3
4	5	11	14

δ

1	4	15	14
16	10	5	3
9	7	12	6
8	13	2	11

δ

1	15	4	14
16	10	5	3
9	7	12	6
8	2	13	11

δ

1	6	12	15
13	10	8	3
16	7	9	2
4	11	5	14

δ

1	6	11	16
12	10	7	5
13	3	14	4
8	15	2	9

δ

1	6	11	16
13	10	7	4
12	3	14	5
8	15	2	9

δ

1	12	13	8
15	10	3	6
2	7	14	11
16	5	4	9

δ

1	12	6	15
13	10	8	3
16	7	9	2
4	5	11	14

δ

1	13	12	8
15	10	3	6
2	7	14	11
16	4	5	9

β

1	7	12	14
16	10	5	3
13	11	8	2
4	6	9	15

β

1	7	14	12
16	10	3	5
4	6	15	9
13	11	2	8

α

1	7	14	12
16	10	3	5
11	13	8	2
6	4	9	15

β

1	7	12	14
16	10	5	3
6	4	15	9
11	13	2	8

γ

1	8	12	13
15	10	6	3
14	11	7	2
4	5	9	16

α

1	8	13	12
15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7

γ

1	8	14	11
15	10	4	5
12	13	7	2
6	3	9	16

α

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

δ

1	4	14	15
16	11	5	2
9	6	12	7
8	13	3	10

δ

1	14	4	15
16	11	5	2
9	6	12	7
8	3	13	10

δ

1	5	12	16
14	11	6	3
15	8	9	2
4	10	7	13

δ

1	5	12	16
15	11	6	2
14	8	9	3
4	10	7	13

δ

1	5	12	16
10	11	6	7
15	4	13	2
8	14	3	9

δ

1	5	12	16
15	11	6	2
10	4	13	7
8	14	3	9

δ

1	10	15	8
14	11	4	5
3	6	13	12
16	7	2	9

δ

1	10	7	16
14	11	6	3
15	8	9	2
4	5	12	13

δ

1	10	7	16
15	11	6	2
14	8	9	3
4	5	12	13

δ

1	14	3	16
15	11	6	2
10	4	13	7
8	5	12	9

β

1	6	12	15
16	11	5	2
13	10	8	3
4	7	9	14

β

1	6	15	12
16	11	2	5
4	7	14	9
13	10	3	8

β

1	6	15	12
16	11	2	5
10	13	8	3
7	4	9	14

β

1	6	12	15
16	11	5	2
7	4	14	9
10	13	3	8

δ

1	8	13	12
16	11	2	5
3	6	15	10
14	9	4	7

δ

1	13	8	12
16	11	2	5
3	6	15	10
14	4	9	7

γ

1	8	12	13
14	11	7	2
15	10	6	3
4	5	9	16

α

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

γ

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

α

1	8	10	15
14	11	5	4
7	2	16	9
12	13	3	6

Digitized by Google

1 4 15 14	1 4 14 15	1 9 16 8	1 9 16 8
9 12 7 6	9 12 6 7	14 12 5 3	15 12 5 2
16 5 10 3	16 5 11 2	4 6 11 13	4 7 10 13
8 13 2 11	8 13 3 10	15 7 2 10	14 6 3 11
♪	β	γ	ϵ
1 6 11 16	1 6 11 16	1 6 16 11	1 7 10 16
14 12 5 3	15 12 5 2	15 12 2 5	14 12 5 3
15 9 8 2	14 9 8 3	4 7 13 10	15 9 8 2
4 7 10 13	4 7 10 13	14 9 3 8	4 6 11 13
♪	γ	♪	ϵ
1 7 10 16	1 7 16 10	1 6 11 16	1 6 11 16
15 12 5 2	14 12 3 5	8 12 5 9	15 12 5 2
14 9 8 3	4 6 13 11	15 3 14 2	8 3 14 9
4 6 11 13	15 9 2 8	10 13 4 7	10 13 4 7
γ	γ	β	♪
1 6 16 11	1 8 10 15	1 8 15 10	1 13 4 16
15 12 2 5	13 12 6 3	13 12 3 6	15 12 5 2
10 13 7 4	16 9 7 2	4 5 14 11	8 3 14 9
8 3 9 14	4 5 11 14	16 9 2 7	10 6 11 7
♪	γ	β	γ
1 7 10 16	1 7 16 10	1 7 10 16	1 8 11 14
8 12 5 9	14 12 3 5	14 12 5 3	13 12 7 2
14 2 15 3	11 13 6 4	8 2 15 9	16 9 6 3
11 13 4 6	8 2 9 15	11 13 4 6	4 5 10 15

β	♪	♪	♪
1 8 14 11	1 13 4 16	1 3 14 16	1 3 14 16
13 12 2 7	14 12 5 3	12 13 4 5	15 13 4 2
4 5 15 10	8 2 15 9	15 8 9 2	12 8 9 5
16 9 3 6	11 7 10 6	6 10 7 11	6 10 7 11
♪	♪	♪	♪
1 3 14 16	1 3 14 16	1 10 7 16	1 10 7 16
15 13 4 2	10 13 4 7	12 13 4 5	15 13 4 2
10 6 11 7	15 6 11 2	15 8 9 2	12 8 9 5
8 12 5 9	8 12 5 9	6 3 14 11	6 3 14 11
♪	♪	β	β
1 10 15 8	1 12 5 16	1 4 14 15	1 4 15 14
12 13 6 3	15 13 4 2	16 13 3 2	16 13 2 3
5 4 11 14	10 6 11 7	11 10 8 5	6 7 12 9
16 7 2 9	8 3 14 14	6 7 9 12	11 10 5 8
β	β	♪	♪
1 4 15 14	1 4 14 15	1 8 10 15	1 10 8 15
16 13 2 3	16 13 3 2	16 13 3 2	16 13 3 2
10 11 8 5	7 6 12 9	5 4 14 11	5 4 14 11
7 6 9 12	10 11 5 8	12 9 7 6	12 7 9 6
♪	♪		
1 7 14 12	1 7 14 12	1 7 16 10	1 7 16 10
8 13 2 11	11 13 2 8	11 13 4 6	14 13 4 3
9 4 15 6	6 4 15 9	14 12 5 3	11 12 5 6
16 10 3 5	16 10 3 5	8 2 9 15	8 2 9 15

δ

1	8	9	16
14	13	4	3
7	2	15	10
12	11	6	5

δ

1	11	6	16
14	13	4	3
7	2	15	10
12	8	9	5

γ

1	8	14	11
12	13	7	2
15	10	4	5
6	3	9	16

α

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

γ

1	8	15	10
12	13	6	3
14	11	4	5
7	2	9	16

α

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

δ

1	2	15	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	11	6	9

δ

1	2	16	15
13	14	4	3
12	7	9	6
8	11	5	10

δ

1	2	15	16
13	14	3	4
12	7	10	5
8	11	6	9

δ

1	11	6	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	2	15	9

δ

1	11	6	16
13	14	3	4
12	7	10	5
8	2	15	9

δ

1	4	13	16
12	14	3	5
15	9	8	2
6	7	10	11

β

1	4	13	16
15	14	3	2
12	9	8	5
6	7	10	11

γ

1	4	16	13
15	14	2	3
6	7	11	10
12	9	5	8

β

1	7	10	16
12	14	3	5
15	9	8	2
6	4	13	11

γ

1	7	16	10
12	14	5	3
6	4	11	13
15	9	2	8

δ

1	7	10	16
15	14	3	2
12	9	8	5
6	4	13	11

δ

1	4	13	16
8	14	3	9
15	5	12	2
10	11	6	7

γ

1	4	16	13
15	14	2	3
10	11	7	6
8	5	9	12

β

1	4	13	16
15	14	3	2
8	5	12	9
10	11	6	7

γ

1	8	10	15
11	14	4	5
16	9	7	2
6	3	13	12

β

1	8	15	10
11	14	5	4
6	3	12	13
16	9	2	7

δ

1	11	6	16
15	14	3	2
8	5	12	9
10	4	13	7

1	5	16	12
10	14	3	7
8	4	13	9
15	11	2	6

1	5	16	12
10	14	3	7
15	11	6	2
8	4	9	13

1	5	16	12
15	14	3	2
10	11	6	7
8	4	9	13

1	5	16	12
8	14	3	9
10	4	13	7
15	11	2	6

δ

1	7	10	16
8	14	3	9
12	2	15	5
13	11	6	4

γ

1	7	16	10
12	14	5	3
13	11	4	6
8	2	9	15

β

1	7	10	16
12	14	3	5
8	2	15	9
13	11	6	4

γ

1	8	13	12
11	14	7	2
16	9	4	5
6	3	10	15

β

1	8	12	13
11	14	2	7
6	3	15	10
16	9	5	4

δ

1	11	6	16
12	14	3	5
8	2	15	9
13	7	10	4

δ

1	4	13	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	6	11	10

β

1	4	13	16
14	15	2	3
12	9	8	5
7	6	11	10

γ

1	4	16	13
14	15	3	2
7	6	10	11
12	9	5	8

ε

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

γ

1	6	16	11
12	15	5	2
7	4	10	13
14	9	3	8

δ

1	6	11	16
14	15	2	3
12	9	8	5
7	4	13	10

1	3	16	14
8	15	2	9
13	6	11	4
12	10	5	7

													♪		
1	3	16	14	1	3	16	14	1	3	16	14	1	4	13	16
13	15	2	4	13	15	2	4	12	15	2	5	8	15	2	9
8	6	11	9	12	10	7	5	13	10	7	4	14	5	12	3
12	10	5	7	8	6	9	11	8	6	9	11	11	10	7	6
		β				γ				γ				♂	
1	4	13	16	1	4	16	13	1	8	11	14	1	8	14	11
14	15	2	3	14	15	3	2	10	15	4	5	10	15	5	4
8	5	12	9	11	10	6	7	16	9	6	3	7	2	12	13
11	10	7	6	8	5	9	12	7	2	13	12	16	9	3	6
		♪				♪				♪				♪	
1	10	7	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	7	14	12
14	15	2	3	7	15	2	10	14	15	2	3	9	15	4	6
8	5	12	9	14	4	13	3	7	4	13	10	8	2	13	11
11	4	13	6	12	9	8	5	12	9	8	5	16	10	3	5
						♪				♪				γ	
1	7	14	12	1	9	8	16	1	6	11	16	1	6	16	11
9	15	4	6	14	15	2	3	8	15	2	9	12	15	5	2
16	10	5	3	7	4	13	10	12	3	14	5	13	10	4	7
8	2	11	13	12	6	11	5	13	10	7	4	8	3	9	14
		β				γ				β				♪	
1	6	11	16	1	8	13	12	1	8	12	13	1	10	7	16
12	15	2	5	10	15	6	3	10	15	3	6	12	15	2	5
8	3	14	9	16	9	4	5	7	2	14	11	8	3	14	9
13	10	7	4	7	2	11	14	16	9	5	4	13	6	11	4

I

γ

1	4	15	14
13	16	3	2
8	5	10	11
12	9	6	7

γ

1	4	14	15
13	16	2	3
12	9	7	6
8	5	11	10

γ

1	6	15	12
11	16	5	2
8	3	10	13
14	9	4	7

γ

1	6	12	15
11	16	2	5
14	9	7	4
8	3	13	10

γ

1	4	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

γ

1	4	15	14
13	16	3	2
12	9	6	7
8	5	10	11

γ

1	7	14	12
10	16	5	3
8	2	11	13
15	9	4	6

γ

1	7	12	14
10	16	3	5
15	9	6	4
8	2	13	11

γ

1	6	15	12
11	16	5	2
14	9	4	7
8	3	10	13

γ

1	6	12	15
11	16	2	5
8	3	13	10
14	9	7	4

γ

1	7	14	12
10	16	5	3
15	9	4	6
8	2	11	13

γ

1	7	12	14
10	16	3	5
8	2	13	11
15	9	6	4

γ

2	13	7	12
16	3	9	6
11	8	14	1
5	10	4	15

γ

2	13	11	8
16	3	5	10
7	12	14	1
9	6	4	15

α

2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4
7	12	1	14

α

2	13	12	7
16	3	6	9
5	10	15	4
11	8	1	14

β

2	14	7	11
15	3	10	6
12	8	13	1
5	9	4	16

β

2	14	11	7
15	3	6	10
5	9	16	4
12	8	1	13

β

2	14	11	7
15	3	6	10
8	12	13	1
9	5	4	16

β

2	14	7	11
15	3	10	6
9	5	16	4
8	12	1	13

δ

2	11	8	13
15	4	9	6
10	5	16	3
7	14	1	12

δ

2	11	14	7
15	4	5	10
8	13	12	1
9	6	3	16

δ

2	14	11	7
15	4	5	10
8	13	12	1
9	3	6	16

δ

2	9	16	7
15	5	4	10
6	12	13	3
11	8	1	14

δ

2	15	6	11
16	5	12	1
9	4	13	8
7	10	3	14

γ

2	11	13	8
16	5	3	10
7	14	12	1
9	4	6	15

α

2	11	8	13
16	5	10	3
9	4	15	6
7	14	1	12

γ

2	11	7	14
16	5	9	4
13	8	12	1
3	10	6	15

α

2	11	14	7
16	5	4	9
3	10	15	6
13	8	1	12

β

2	12	7	13
15	5	10	4
14	8	11	1
3	9	6	16

β

2	12	13	7
15	5	4	10
3	9	16	6
14	8	1	11

β

2	12	13	7
15	5	4	10
8	14	11	1
9	3	6	16

β

2	12	7	13
15	5	10	4
9	3	16	6
8	14	1	11

δ

2	9	16	7
15	6	3	10
4	11	14	5
13	8	1	12

δ

2	15	4	13
16	6	11	1
9	3	14	8
7	10	5	12

δ

2	11	14	7
12	6	3	13
5	9	16	4
15	8	1	10

δ

2	11	14	7
13	6	3	12
4	9	16	5
15	8	1	10

δ

2	9	8	15
11	7	10	6
16	4	13	1
5	14	3	12

γ

2	9	15	8
16	7	1	10
5	14	12	3
11	4	6	13

β

2	9	8	15
16	7	10	1
11	4	13	6
5	14	3	12

γ

2	11	5	16
14	7	9	4
15	6	12	1
3	10	8	13

β

2	11	16	5
14	7	4	9
3	10	13	8
15	6	1	12

δ

2	14	3	15
16	7	10	1
11	4	13	6
5	9	8	12

δ

2	9	8	15
13	7	10	4
16	6	11	1
3	12	5	14

β

2	9	8	15
16	7	10	1
13	6	11	4
3	12	5	14

γ

2	9	15	8
16	7	1	10
3	12	14	5
13	6	4	11

β

2	12	5	15
13	7	10	4
16	6	11	1
3	9	8	14

γ

2	12	15	5
13	7	4	10
3	9	14	8
16	6	1	11

δ

2	12	5	15
16	7	10	1
13	6	11	4
3	9	8	14

δ

2	11	13	8
12	7	1	14
5	10	16	3
15	6	4	9

γ

2	11	8	13
14	7	12	1
15	6	9	4
3	10	5	16

β

2	11	13	8
14	7	1	12
3	10	16	5
15	6	4	9

γ

2	12	15	5
13	7	4	10
8	14	9	3
11	1	6	16

β

2	12	5	15
13	7	10	4
11	1	16	6
8	14	3	9

δ

2	13	11	8
14	7	1	12
3	10	16	5
15	4	6	9

β

2	9	7	16
15	8	10	1
14	5	11	4
3	12	6	13

β

2	9	16	7
15	8	1	10
3	12	13	6
14	5	4	11

β

2	9	16	7
15	8	1	10
5	14	11	4
12	3	6	13

β

2	9	7	16
15	8	10	1
12	3	13	6
5	14	4	11

δ

2	9	16	7
12	8	1	13
5	11	14	4
15	6	3	10

Digitized by Google

δ

2	9	16	7
13	8	1	12
4	11	14	5
15	6	3	10

γ

2	11	7	14
13	8	12	1
16	5	9	4
3	10	6	15

α

2	11	14	7
13	8	1	12
3	10	15	6
16	5	4	9

γ

2	11	16	5
13	8	3	10
7	14	9	4
12	1	6	15

α

2	11	5	16
13	8	10	3
12	1	15	6
7	14	4	9

δ

2	3	16	13
15	9	6	4
10	8	11	5
7	14	1	12

δ

2	15	10	7
16	9	8	1
3	6	11	14
13	4	5	12

δ

2	5	12	15
11	9	8	6
14	4	13	3
7	16	1	10

δ

2	5	12	15
14	9	8	3
11	4	13	6
7	16	1	10

δ

2	5	11	16
14	9	7	4
15	8	10	1
3	12	6	13

δ

2	11	14	7
16	9	4	5
1	8	13	12
15	6	3	10

δ

2	11	5	16
14	9	7	4
15	8	10	1
3	6	12	13

δ

2	14	11	7
16	9	4	5
1	8	13	12
15	3	6	10

γ

2	7	13	12
16	9	3	6
11	14	8	1
5	4	10	15

α

2	7	12	13
16	9	6	3
5	4	15	10
11	14	1	8

γ

2	7	11	14
16	9	5	4
13	12	8	1
3	6	10	15

α

2	7	14	11
16	9	4	5
3	6	15	10
13	12	1	8

β

2	8	11	13
15	9	6	4
14	12	7	1
3	5	10	16

β

2	8	13	11
15	9	4	6
3	5	16	10
14	12	1	7

β

2	8	13	11
15	9	4	6
12	14	7	1
5	3	10	16

β 2 8 11 13 15 9 6 4 5 3 16 10 12 14 1 7	♪ 2 5 11 16 15 10 8 1 14 7 9 4 3 12 6 13	♪ 2 11 14 7 15 10 3 6 1 8 13 12 16 5 4 9	♪ 2 11 5 16 15 10 8 1 14 7 9 4 3 6 12 13
♪ 2 5 16 11 15 10 3 6 4 7 14 9 13 12 1 8	♪ 2 15 4 13 16 10 7 1 5 3 14 12 11 6 9 8	♪ 2 7 14 11 8 10 3 13 9 5 16 4 15 12 1 6	♪ 2 7 14 11 13 10 3 8 4 5 16 9 15 12 1 6
 2 3 16 13 10 11 8 5 15 6 9 4 7 14 1 12	 2 10 15 7 13 11 6 4 3 5 12 14 16 8 1 9	 2 10 15 7 16 11 6 1 3 8 9 14 13 5 4 12	♪ 2 5 12 15 7 11 6 10 16 4 13 1 9 14 3 8
β 2 5 15 12 16 11 1 6 9 14 8 3 7 4 10 13	β 2 5 12 15 16 11 6 1 7 4 13 10 9 14 3 8	γ 2 7 9 16 14 11 5 4 15 10 8 1 3 6 12 13	β 2 7 16 9 14 11 4 5 3 6 13 12 15 10 1 8
♪ 2 14 3 15 16 11 6 1 7 4 13 10 9 5 12 8	β 2 3 13 16 10 11 5 8 15 6 12 1 7 14 4 9	♪ 2 5 12 15 13 11 6 4 16 10 7 1 3 8 9 14	β 2 5 12 15 16 11 6 1 13 10 7 4 3 8 9 14

γ

2	5	15	12
16	11	1	6
3	8	14	9
13	10	4	7

β

2	8	9	15
13	11	6	4
16	10	7	1
3	5	12	14

γ

2	8	15	9
13	11	4	6
3	5	14	12
16	10	1	7

δ

2	8	9	15
16	11	6	1
13	10	7	4
3	5	12	14

δ

2	7	13	12
8	11	1	14
9	6	16	3
15	10	4	5

γ

2	7	12	13
14	11	8	1
15	10	5	4
3	6	9	16

β

2	7	13	12
14	11	1	8
3	6	16	9
15	10	4	5

γ

2	8	15	9
13	11	4	6
12	14	5	3
7	1	10	16

ε

2	8	9	15
13	11	6	4
7	1	16	10
12	14	3	5

δ

2	13	7	12
14	11	1	8
3	6	16	9
15	4	10	5

δ

2	3	13	16
15	12	6	1
10	5	11	8
7	14	4	9

γ

2	13	3	16
15	12	6	1
10	5	11	8
7	4	14	9

β

2	5	11	16
15	12	6	1
14	9	7	4
3	8	10	13

β

2	5	16	11
15	12	1	6
3	8	13	10
14	9	4	7

β

2	5	16	11
15	12	1	6
9	14	7	4
8	3	10	13

β

2	5	11	16
15	12	6	1
8	3	13	10
9	14	4	7

δ

2	5	16	11
8	12	1	13
9	7	14	4
15	10	3	6

δ

2	5	16	11
13	12	1	8
4	7	14	9
15	10	3	6

γ

2	7	11	14
13	12	8	1
16	9	5	4
3	6	10	15

α

2	7	14	11
13	12	1	8
3	6	15	10
16	9	4	5

Digitized by Google

γ			
2	7	16	9
13	12	3	6
11	14	5	4
8	1	10	15

α			
2	7	9	16
13	12	6	3
8	1	15	10
11	14	4	5

δ			
2	7	10	15
8	12	5	9
11	1	16	6
13	14	3	4

δ			
2	7	10	15
11	12	5	6
8	1	16	9
13	14	3	4

δ			
2	8	11	13
14	12	1	7
3	5	16	10
15	9	6	4

2	8	15	9
11	12	5	6
14	13	4	3
7	1	10	16

2	8	15	9
14	12	5	3
11	13	4	6
7	1	10	16

δ			
2	11	8	13
14	12	1	7
3	5	16	10
15	6	9	4

δ			
2	1	16	15
11	13	4	6
14	8	9	3
7	12	5	10

δ			
2	1	16	15
14	13	4	3
11	8	9	6
7	12	5	10

2	1	15	16
14	13	3	4
11	8	10	5
7	12	6	9

δ			
2	11	14	7
12	13	8	1
5	4	9	16
15	6	3	10

δ			
2	12	5	15
14	13	4	3
11	8	9	6
7	1	16	10

δ			
2	3	14	15
7	13	4	10
16	6	11	1
9	12	5	8

γ			
2	3	15	14
16	13	1	4
9	12	8	5
7	6	10	11

β			
2	3	14	15
16	13	4	1
7	6	11	10
9	12	5	8

γ			
2	7	9	16
12	13	3	6
15	10	8	1
5	4	14	11

β			
2	7	16	9
12	13	6	3
5	4	11	14
15	10	1	8

δ			
2	12	5	15
16	13	4	1
7	6	11	10
9	3	14	8

δ			
2	3	14	15
11	13	4	6
16	10	7	1
5	8	9	12

Digitized by Google

β

2	3	14	15
16	13	4	1
11	10	7	6
5	8	9	12

γ

2	3	15	14
16	13	1	4
5	8	12	9
11	10	6	7

β

2	8	9	15
11	13	4	6
16	10	7	1
5	3	14	12

γ

2	8	15	9
11	13	6	4
5	3	12	14
16	10	1	7

δ

2	8	9	15
16	13	4	1
11	10	7	6
5	3	14	12

2	6	15	11
7	13	4	10
9	3	14	8
16	12	1	5

2	6	15	11
9	13	4	8
7	3	14	10
16	12	1	5

2	6	15	11
9	13	4	8
16	12	5	1
7	3	10	14

2	6	15	11
16	13	4	1
9	12	5	8
7	3	10	14

δ

2	7	11	14
8	13	1	12
9	4	16	5
15	10	6	3

γ

2	7	14	11
12	13	8	1
15	10	3	6
5	4	9	16

β

2	7	11	14
12	13	1	8
5	4	16	9
15	10	6	3

γ

2	8	15	9
11	13	6	4
14	12	3	5
7	1	10	16

β

2	8	9	15
11	13	4	6
7	1	16	10
14	12	5	3

δ

2	11	7	14
12	13	1	8
5	4	16	9
15	6	10	3

2	4	15	13
5	14	3	12
16	7	10	1
11	9	6	8

2	4	15	13
16	14	3	1
5	7	10	12
11	9	6	8

2	4	13	15
16	14	1	3
9	11	8	6
7	5	12	10

2	5	12	15
16	14	1	3
9	11	8	6
7	4	13	10

β

2	3	13	16
15	14	4	1
12	9	7	6
5	8	10	11

β	β	β	
2 3 16 13	2 3 16 13	2 3 13 16	2 4 15 13
15 14 1 4	15 14 1 4	15 14 4 1	9 14 3 8
5 8 11 10	9 12 7 6	8 5 11 10	16 11 6 1
12 9 6 7	8 5 10 11	9 12 6 7	7 5 10 12
			♪
2 4 13 15	2 4 15 13	2 9 8 15	2 7 9 16
16 14 1 3	16 4 3 1	16 14 1 3	15 14 4 1
5 7 12 10	9 11 6 8	5 7 12 10	6 3 13 12
11 9 8 6	7 5 10 12	11 4 13 6	11 10 8 5
♪	γ	α	γ
2 9 7 16	2 7 13 12	2 7 12 13	2 7 16 9
15 14 4 1	11 14 8 1	11 14 1 8	11 14 5 4
6 3 13 12	16 9 3 6	5 4 15 10	13 12 3 6
11 8 10 5	5 4 10 15	16 9 6 3	8 1 10 15
α	γ	γ	γ
2 7 9 16	2 3 16 13	2 3 13 16	2 3 13 16
11 14 4 5	14 15 4 1	14 15 1 4	14 15 1 4
8 1 15 10	7 6 9 12	11 10 8 5	7 6 12 9
13 12 6 3	11 10 5 8	7 6 12 9	11 10 8 5
γ	γ	γ	γ
2 3 16 13	2 8 13 11	2 8 11 13	2 5 16 11
14 15 4 1	9 15 6 4	9 15 4 6	12 15 6 1
11 10 5 8	7 1 12 14	16 10 5 3	7 4 9 14
7 6 9 12	16 10 3 5	7 1 14 12	13 10 3 8

γ
2 5 11 16
12 15 1 6
13 10 8 3
7 4 14 9

γ
2 5 11 16
12 15 1 6
7 4 14 9
13 10 8 3

γ
2 5 16 11
12 15 6 1
13 10 3 8
7 4 9 14

γ
2 8 11 13
9 15 4 6
7 1 14 12
16 10 5 3

γ
2 8 13 11
9 15 6 4
16 10 3 5
7 1 12 14

δ
2 3 14 15
11 16 1 6
13 10 7 4
8 5 12 9

β
2 3 14 15
13 16 1 4
11 10 7 6
8 5 12 9

γ
2 3 15 14
13 16 4 1
8 5 9 12
11 10 6 7

β
2 5 12 15
11 16 1 6
13 10 7 4
8 3 14 9

γ
2 5 15 12
11 16 6 1
8 3 9 14
13 10 4 7

δ
2 5 12 15
13 16 1 4
11 10 7 6
8 3 14 9

2 4 13 15
14 16 3 1
7 5 10 12
11 9 8 6

2 4 13 15
14 16 3 1
11 9 6 8
7 5 12 10

2 5 12 15
14 16 3 1
11 9 6 8
7 4 13 10

2 9 8 15
14 16 3 1
7 5 10 12
11 4 13 6

δ
2 3 14 15
7 16 1 10
13 6 11 4
12 9 8 5

γ
2 3 15 14
13 16 4 1
12 9 5 8
7 6 10 11

β
2 3 14 15
13 16 1 4
7 6 11 10
12 9 8 5

β
2 7 13 12
9 16 6 3
8 1 11 14
15 10 4 5

γ
2 7 12 13
9 16 3 6
15 10 5 4
8 1 14 11

δ

2	9	8	15
13	16	1	4
7	6	11	10
12	3	14	5

δ

2	3	14	15
8	16	1	9
11	5	12	6
13	10	7	4

δ

2	3	14	15
11	16	1	6
8	5	12	9
13	10	7	4

δ

2	8	11	13
10	16	5	3
15	9	4	6
7	1	14	12

δ

2	8	11	13
10	16	5	3
7	1	12	14
15	9	6	4

δ

2	10	7	15
11	16	1	6
8	5	12	9
13	3	14	4

δ

2	5	12	15
7	16	1	10
11	4	13	6
14	9	8	3

γ

2	5	15	12
11	16	6	1
14	9	3	8
7	4	10	13

β

2	5	12	15
11	16	1	6
7	4	13	10
14	9	8	3

γ

2	7	14	11
9	16	5	4
15	10	3	6
8	1	12	13

β

2	7	11	14
9	16	4	5
8	1	13	12
15	10	6	3

δ

2	9	8	15
11	16	1	6
7	4	13	10
14	5	12	3

γ

3	13	6	12
16	2	9	7
10	8	15	1
5	11	4	14

α

3	13	8	10
16	2	11	5
9	7	14	4
6	12	1	15

γ

3	13	10	8
16	2	5	11
6	12	15	1
9	7	4	14

α

3	13	12	6
16	2	7	9
5	11	14	4
10	8	1	15

β

3	14	8	9
15	2	12	5
10	7	13	4
6	11	1	16

β

3	14	9	8
15	2	5	12
6	11	16	1
10	7	4	13

β

3	14	12	5
15	2	8	9
6	11	13	4
10	7	1	16

β

3	14	5	12
15	2	9	8
10	7	16	1
6	11	4	13

Digitized by Google

δ

3	9	16	6
14	4	5	11
7	13	12	2
10	8	1	15

δ

3	14	7	10
16	4	13	1
9	5	12	8
6	11	2	15

δ

3	10	7	14
13	4	9	8
12	5	16	1
6	15	2	11

δ

3	13	12	6
15	4	5	10
2	9	16	7
14	8	1	11

γ

3	10	13	8
16	5	2	11
6	15	12	1
9	4	7	14

α

3	10	8	13
16	5	11	2
9	4	14	7
6	15	1	12

α

3	10	15	6
16	5	4	9
2	11	14	7
13	8	1	12

δ

3	9	8	14
12	5	10	7
13	4	15	2
6	16	1	11

δ

3	12	13	6
16	5	4	9
1	10	15	8
14	7	2	11

β

3	12	13	6
14	5	4	11
2	9	16	7
15	8	1	10

β

3	12	13	6
14	5	4	11
8	15	10	1
9	2	7	16

β

3	12	6	13
14	5	11	4
9	2	16	7
8	15	1	10

δ

3	9	8	14
10	6	11	7
16	4	13	1
5	15	2	12

γ

3	9	14	8
16	6	1	11
5	15	12	2
10	4	7	13

β

3	9	8	14
16	6	11	1
10	4	13	7
5	15	2	12

β

3	10	16	5
15	6	4	9
2	11	13	8
14	7	1	12

δ

3	15	2	14
16	6	11	1
10	4	13	7
5	9	8	12

γ

3	9	14	8
16	6	1	11
2	12	15	5
13	7	4	10

γ

3	12	14	5
13	6	4	11
2	9	15	8
16	7	1	10

δ

3	10	13	8
12	6	1	15
5	11	16	2
14	7	4	9

	β				γ				β				δ		
3	10	13	8	3	12	14	5	3	12	5	14	3	13	10	8
15	6	1	12	13	6	4	11	13	6	11	4	15	6	1	12
2	11	16	5	8	15	9	2	10	1	16	7	2	11	16	5
14	7	4	9	10	1	7	16	8	15	2	9	14	4	7	9
	δ				δ				δ				δ		
3	9	8	14	3	10	15	6	3	12	13	6	3	13	12	6
10	7	12	5	16	7	2	9	14	7	2	11	14	7	2	11
15	2	13	4	1	12	13	8	1	10	15	8	1	10	15	8
6	16	1	11	14	5	4	11	16	5	4	9	16	4	5	9
	δ				δ				δ				β		
3	6	15	10	3	9	16	6	3	9	16	6	3	9	16	6
14	7	2	11	10	8	1	15	15	8	1	10	14	8	1	11
4	9	16	5	7	13	12	2	2	13	12	7	2	12	13	7
13	12	1	8	14	4	5	11	14	4	5	11	15	5	4	10
	β				β				α				γ		
3	9	16	6	3	9	6	16	3	10	15	6	3	10	16	5
14	8	1	11	14	8	11	1	13	8	1	12	13	8	2	11
5	15	10	4	12	2	13	7	2	11	14	7	6	15	9	4
12	2	7	13	5	15	4	10	16	5	4	9	12	1	7	14
	α				δ				δ				δ		
3	10	5	16	3	6	15	10	3	6	15	10	3	12	5	14
13	8	11	2	12	8	1	13	13	8	1	12	15	8	9	2
12	1	14	7	5	9	16	4	4	9	16	5	6	1	16	11
6	15	4	9	14	11	2	7	14	11	2	7	10	13	4	7

δ

3	13	4	14
15	8	9	2
6	1	16	11
10	12	5	7

δ

3	14	11	6
16	9	8	1
2	7	10	15
13	4	5	12

δ

3	2	16	13
14	9	7	4
11	8	10	5
6	15	1	12

γ

3	6	13	12
16	9	2	7
10	15	8	1
5	4	11	14

α

3	6	12	13
16	9	7	2
5	4	14	11
10	15	1	8

α

3	6	15	10
16	9	4	5
2	7	14	11
13	12	1	8

δ

3	5	12	14
8	9	6	11
13	4	15	2
10	16	1	7

δ

3	8	13	10
16	9	4	5
1	6	15	12
14	11	2	7

β

3	8	13	10
14	9	4	7
2	5	16	11
15	12	1	6

β

3	8	13	10
14	9	4	7
12	15	6	1
5	2	11	16

β

3	8	10	13
14	9	7	4
5	2	16	11
12	15	1	6

3	2	16	13
11	10	8	5
14	7	9	4
6	15	1	12

3	2	13	16
11	10	5	8
14	7	12	1
6	15	4	9

3	11	14	6
13	10	7	4
2	5	12	15
16	8	1	9

3	11	14	6
16	10	7	1
2	8	9	15
13	5	4	12

δ

3	5	12	14
6	10	7	11
16	4	13	1
9	15	2	8

γ

3	5	14	12
16	10	1	7
9	15	8	2
6	4	11	13

β

3	5	12	14
16	10	7	1
6	4	13	11
9	15	2	8

β

3	6	16	9
15	10	4	5
2	7	13	12
14	11	1	8

δ

3	15	2	14
16	10	7	1
6	4	13	11
9	5	12	8

γ

3	5	14	12
16	10	1	7
2	8	15	9
13	11	4	6

γ

3	8	14	9
13	10	4	7
12	15	5	2
6	1	11	16

δ

3	6	13	12
8	10	1	15
9	7	16	2
14	11	4	5

β

3	6	13	12
15	10	1	8
2	7	16	9
14	11	4	5

γ

3	8	14	9
13	10	4	7
12	15	5	2
6	1	11	16

β

3	8	9	14
13	10	7	4
6	1	16	11
12	15	2	5

δ

3	13	6	12
15	10	1	8
2	7	16	9
14	4	11	5

δ

3	2	16	13
14	11	5	4
7	6	12	9
10	15	1	8

δ

3	14	7	10
16	11	6	1
2	5	12	15
13	4	9	8

δ

3	5	12	14
6	11	8	9
15	2	13	4
10	16	1	7

δ

3	6	15	10
16	11	2	5
1	8	13	12
14	9	4	7

δ

3	8	13	10
14	11	2	7
1	6	15	12
16	9	4	5

δ

3	13	8	10
14	11	2	7
1	6	15	12
16	4	9	5

δ

3	6	12	13
8	11	5	10
9	2	16	7
14	15	1	4

δ

3	6	12	13
10	11	5	8
7	2	16	9
14	15	1	4

δ

3	2	13	16
14	11	7	1
11	5	10	8
6	15	4	9

δ

3	13	2	16
14	12	7	1
11	5	10	8
6	4	15	9

3	2	15	14
16	12	1	5
9	13	8	4
6	7	10	11

3	2	16	13
7	12	6	9
14	5	11	4
10	15	1	8

3	7	10	14
16	12	1	5
9	13	8	4
6	2	15	11

Digitized by Google

	β	β	β
3 7 14 10	3 5 16 10	3 5 16 10	3 5 10 16
16 12 5 1	14 12 1 7	14 12 1 7	14 12 7 1
2 6 11 15	2 8 13 11	9 15 6 4	8 2 13 11
13 9 4 8	15 9 4 6	8 2 11 13	9 15 4 6
α	γ	α	
3 6 15 10	3 6 16 9	3 6 9 16	3 7 14 10
13 12 1 8	13 12 2 7	13 12 7 2	9 12 5 8
2 7 14 11	10 15 5 4	8 1 14 11	16 13 4 1
16 9 4 5	8 1 11 14	10 15 4 5	6 2 11 15
			δ
3 7 10 14	3 7 14 10	3 9 8 14	3 2 15 14
16 12 1 5	16 12 5 1	16 12 1 5	6 13 4 11
2 6 15 11	9 13 4 8	2 6 15 11	16 7 10 1
13 9 8 4	6 2 11 15	13 7 10 4	9 12 5 8
γ	β	γ	β
3 2 14 15	3 2 15 14	3 6 9 16	3 6 16 9
16 13 1 4	16 13 4 1	12 13 2 7	12 13 7 2
9 12 8 5	6 7 10 11	14 11 8 1	5 4 10 15
6 7 11 10	9 12 5 8	5 4 15 10	14 11 1 8
δ			
3 12 5 14	3 1 16 14	3 1 16 14	3 8 9 14
16 13 4 1	15 13 2 4	15 13 2 4	15 13 2 4
6 7 10 11	6 8 11 9	10 12 7 5	10 12 7 5
9 2 15 8	10 12 5 7	6 8 9 11	6 1 16 11

Digitized by Google

	δ	β	γ
3 12 5 14	3 2 15 14	3 2 15 14	3 2 14 15
15 13 2 4	10 13 4 7	16 13 4 1	16 13 1 4
6 8 11 9	16 11 6 1	10 11 6 7	5 8 12 9
10 1 16 7	5 8 9 12	5 8 9 12	10 11 7 6
β	γ	δ	γ
3 8 9 14	3 8 14 9	3 8 9 14	3 6 15 10
10 13 4 7	10 13 7 4	16 13 4 1	12 13 8 1
16 11 6 1	5 2 12 15	10 11 6 7	14 11 2 7
5 2 15 12	16 11 1 6	5 2 15 12	5 4 9 16
γ	γ	γ	γ
3 8 14 9	3 2 13 16	3 2 16 13	3 5 16 10
10 13 7 4	15 14 1 4	15 14 4 1	12 14 7 1
15 12 2 5	10 11 8 5	6 7 9 12	6 4 9 15
6 1 11 16	6 7 12 9	10 11 5 8	13 11 2 8
γ	γ	γ	γ
3 5 10 16	3 2 16 13	3 2 13 16	3 8 13 10
12 14 1 7	15 14 4 1	15 14 1 4	9 14 7 4
13 11 8 2	10 11 5 8	6 7 12 9	6 1 12 15
6 4 15 9	6 7 9 12	10 11 8 5	16 11 2 5
γ	γ	γ	
3 8 10 13	3 5 16 10	3 8 13 10	3 12 5 14
9 14 4 7	12 14 7 1	9 14 7 4	13 15 4 2
16 11 5 2	13 11 2 8	16 11 2 5	8 6 9 11
6 1 15 12	6 4 9 15	6 1 12 15	10 1 16 7

			β
3 1 14 16	3 1 16 14	3 1 14 16	3 2 13 16
12 15 2 5	13 15 4 2	13 15 2 4	14 15 4 1
13 10 7 4	8 6 9 11	12 10 7 5	12 9 6 7
6 8 11 9	10 12 5 7	6 8 11 9	5 8 11 10
β	β	β	
3 2 16 13	3 2 16 13	3 2 13 16	3 1 14 16
14 15 1 4	14 15 1 4	14 15 4 1	8 15 2 9
5 8 10 11	9 12 6 7	8 5 10 11	13 6 11 4
12 9 7 6	8 5 11 10	9 12 7 6	10 12 7 5
			δ
3 1 14 16	3 1 16 14	3 8 9 14	3 2 16 13
13 15 2 4	13 15 4 2	13 15 4 2	8 15 1 10
8 6 11 9	12 10 5 7	12 10 5 7	9 6 12 7
10 12 7 5	6 8 9 11	6 1 16 11	14 11 5 4
δ	γ	γ	δ
3 2 16 13	3 6 13 12	3 6 16 9	3 4 13 14
10 15 1 8	10 15 8 1	10 15 5 4	6 16 1 11
7 6 12 9	16 9 2 7	13 12 2 7	15 9 8 2
14 11 5 4	5 4 11 14	8 1 11 14	10 5 12 7
δ		δ	δ
3 4 13 14	3 4 14 13	3 5 12 14	3 5 12 14
15 16 1 2	15 16 2 1	6 16 1 11	15 16 1 2
6 9 8 11	6 9 7 12	15 9 8 2	6 9 8 11
10 5 12 7	10 5 11 8	10 4 13 7	10 4 13 7

δ

3	2	15	14
10	16	1	7
13	11	6	4
8	5	12	9

β

3	2	15	14
13	16	1	4
10	11	6	7
8	5	12	9

γ

3	2	14	15
13	16	4	1
8	5	9	12
10	11	7	6

β

3	5	12	14
10	16	1	7
13	11	6	4
8	2	15	9

γ

3	5	14	12
10	16	7	1
8	2	9	15
13	11	4	6

δ

3	5	12	14
13	16	1	4
10	11	6	7
8	2	15	9

δ

3	2	15	14
6	16	1	11
13	7	10	4
12	9	8	5

γ

3	2	14	15
13	16	4	1
12	9	5	8
6	7	11	10

β

3	2	15	14
13	16	1	4
6	7	10	11
12	9	8	5

γ

3	6	12	13
9	16	2	7
14	11	5	4
8	1	15	10

β

3	6	13	12
9	16	7	2
8	1	10	15
14	11	4	5

δ

3	9	8	14
13	16	1	4
6	7	10	11
12	2	15	5

3	2	15	14
12	16	5	1
13	9	4	8
6	7	10	11

3	7	10	14
12	16	5	1
13	9	4	8
6	2	15	11

3	7	10	14
12	16	5	1
6	2	11	15
13	9	8	4

3	9	8	14
12	16	5	1
6	2	11	15
13	7	10	4

γ

3	5	14	12
10	16	7	1
15	9	2	8
6	4	11	13

γ

3	6	15	10
9	16	5	4
14	11	2	7
8	1	12	13

β

4	16	5	9
13	1	12	8
11	7	14	2
6	10	3	15

β

4	16	9	5
13	1	8	12
6	10	15	3
11	7	2	14

β				β				α				γ			
4	16	9	5	4	16	5	9	4	15	6	9	4	15	9	6
13	1	8	12	13	1	12	8	14	1	12	7	14	1	7	12
7	11	14	2	10	6	15	3	11	8	13	2	5	10	16	3
10	6	3	15	7	11	2	14	5	10	3	16	11	8	2	13

α				γ				δ				δ			
4	15	10	5	4	15	5	10	4	15	6	9	4	15	10	5
14	1	8	11	14	1	11	8	11	2	13	8	11	2	7	14
7	12	13	2	9	6	16	3	14	7	12	1	6	9	16	3
9	6	3	16	7	12	2	13	5	10	3	16	13	8	1	12

δ				δ				δ				δ			
4	15	10	5	4	9	8	13	4	14	11	5	4	10	15	5
14	2	7	11	14	3	10	7	16	3	6	9	13	3	6	12
3	9	16	6	11	6	15	2	1	10	15	8	8	14	11	1
13	8	1	12	5	16	1	12	13	7	2	12	9	7	2	16

δ				δ				β				γ			
4	13	8	9	4	9	15	6	4	9	15	6	4	10	13	7
15	3	14	2	10	5	3	16	16	5	3	10	15	5	2	12
10	6	11	7	7	12	14	1	1	12	14	7	6	16	11	1
5	12	1	16	13	8	2	11	13	8	2	11	9	3	8	14

β				δ				β				δ			
4	10	7	13	4	15	9	6	4	16	1	13	4	16	1	13
15	5	12	2	16	5	3	10	9	5	12	8	14	5	12	3
9	3	14	8	1	12	14	7	14	2	15	3	9	2	15	8
6	16	1	11	13	2	8	11	7	11	6	10	7	11	6	10

γ	β	δ	γ
4 14 7 9	4 14 9 7	4 11 6 13	4 15 1 14
11 5 16 2	11 5 2 16	9 5 12 8	10 5 11 8
13 3 10 8	6 12 15 1	14 2 15 3	13 2 16 3
6 12 1 15	13 3 8 10	7 16 1 10	7 12 6 9
γ	α	γ	α
4 14 1 15	4 15 1 14	4 15 5 10	4 15 10 5
11 5 10 8	9 6 12 7	9 6 16 3	9 6 3 16
13 3 16 2	16 3 13 2	14 1 11 8	7 12 13 2
6 12 7 9	5 10 8 11	7 12 2 13	14 1 8 11
δ	δ	β	β
4 16 9 5	4 13 2 15	4 13 7 10	4 13 10 7
13 6 3 12	9 6 11 8	11 6 16 1	11 6 1 16
2 11 14 7	16 3 14 1	14 3 9 8	5 12 15 2
15 1 8 10	5 12 7 10	5 12 2 15	14 3 8 9
β	δ	δ	δ
4 13 1 16	4 15 2 13	4 15 2 13	4 12 5 13
11 6 10 7	7 6 11 10	14 6 11 3	7 6 11 10
14 3 15 2	14 1 16 3	7 1 16 10	14 1 16 3
5 12 8 9	9 12 5 8	9 12 5 8	9 15 2 8
δ	δ	δ	γ
4 14 7 9	4 9 8 13	4 10 15 5	4 9 15 6
12 6 1 15	10 7 14 3	16 7 2 9	14 7 1 12
5 11 16 2	15 2 11 6	1 14 11 8	5 16 10 3
13 3 10 8	5 16 1 12	13 3 6 12	11 2 8 13

α

4	9	6	15
14	7	12	1
11	2	13	8
5	16	3	10

α

4	9	16	5
14	7	2	11
1	12	13	8
15	6	3	10

β

4	13	1	16
10	7	11	6
15	2	14	3
5	12	8	9

β

4	13	6	11
10	7	16	1
15	2	9	8
5	12	3	14

β

4	13	11	6
10	7	1	16
5	12	14	3
15	2	8	9

♪

4	11	6	13
16	7	10	1
5	2	15	12
9	14	3	8

♪

4	5	16	9
11	7	2	14
6	10	15	3
13	12	1	8

♪

4	5	16	9
14	7	2	11
3	10	15	6
13	12	1	8

♪

4	14	3	13
16	7	10	1
5	2	15	12
9	11	6	8

♪

4	9	6	15
11	8	13	2
14	1	12	7
5	16	3	10

♪

4	9	16	5
11	8	1	14
6	15	10	3
13	2	7	12

♪

4	9	16	5
14	8	1	11
3	15	10	6
13	2	7	12

♪

4	5	16	9
13	8	1	12
3	10	15	6
14	11	2	7

♪

4	5	14	11
10	8	1	15
7	9	16	2
13	12	3	6

♪

4	5	14	11
15	8	1	10
2	9	16	7
13	12	3	6

♪

4	10	7	13
14	8	9	3
5	1	16	12
11	15	2	6

♪

4	14	5	11
15	8	1	10
2	9	16	7
13	3	12	6

♪

4	1	15	14
12	9	7	6
13	8	10	3
5	16	2	11

♪

4	1	14	15
12	9	6	7
13	8	11	2
5	16	3	10

♪

4	12	13	5
14	9	8	3
1	6	11	16
15	7	2	10

	♪	β	γ
4 12 13 5	4 5 15 10	4 5 15 10	4 6 13 11
15 9 8 2	6 9 3 16	16 9 3 6	15 9 2 8
1 7 10 16	11 8 14 1	1 8 14 11	10 16 7 1
14 6 3 11	13 12 2 7	13 12 2 7	5 3 12 14
β	♪	♪	β
4 6 11 13	4 15 5 10	4 5 14 11	4 5 14 11
15 9 8 2	16 9 3 6	7 9 2 16	16 9 2 7
5 3 14 12	1 8 14 11	10 8 15 1	1 8 15 10
10 16 1 7	13 2 12 7	13 12 3 6	13 12 3 6
γ	β	♪	γ
4 7 13 10	4 7 10 13	4 14 5 11	4 6 13 11
14 9 3 8	14 9 8 3	16 9 2 7	15 9 2 8
11 16 6 1	5 2 15 12	1 8 15 10	1 7 16 10
5 2 12 15	11 16 1 6	13 3 12 6	14 12 3 5
γ	♪	♪	♪
4 7 13 10	4 1 15 14	4 13 12 5	4 3 14 13
14 9 3 8	13 10 8 3	15 10 7 2	6 10 7 11
1 6 16 11	12 7 9 6	1 8 9 16	15 5 12 2
15 12 2 5	5 16 2 11	14 3 6 11	9 16 1 8
♪			♪
4 3 14 13	4 3 14 13	4 6 11 13	4 6 15 9
15 10 7 2	16 10 1 7	16 10 1 7	16 10 5 3
6 5 12 11	9 15 8 2	9 15 8 2	1 7 12 14
9 16 1 8	5 6 11 12	5 3 14 12	13 11 2 8

δ

4	15	6	9
16	10	5	3
1	7	12	14
13	2	11	8

γ

4	5	14	11
15	10	1	8
9	16	7	2
6	3	12	13

α

4	5	11	14
15	10	8	1
6	3	13	12
9	16	2	7

α

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

δ

4	5	16	9
13	10	3	8
2	7	14	11
15	12	1	6

δ

4	13	2	15
16	10	7	1
5	3	14	12
9	8	11	6

β

4	7	14	9
13	10	3	8
1	6	15	12
16	11	2	5

β

4	7	14	9
13	10	3	8
11	16	5	2
6	1	12	15

β

4	7	9	14
13	10	8	3
6	1	15	12
11	16	2	5

δ

4	1	14	15
13	11	8	2
12	6	9	7
5	16	3	10

δ

4	13	12	5
14	11	6	3
1	8	9	16
15	2	7	10

4	1	15	14
8	11	5	10
13	6	12	3
9	16	2	7

4	1	16	13
15	11	2	6
10	14	7	3
5	8	9	12

4	8	9	13
15	11	2	6
10	14	7	3
5	1	16	12

4	8	13	9
15	11	6	2
1	5	12	16
14	10	3	7

γ

4	5	15	10
14	11	1	8
9	16	6	3
7	2	12	13

α

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

α

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

β

4	6	15	9
13	11	2	8
1	7	14	12
16	10	3	5

β

4	6	15	9
13	11	2	8
10	16	5	3
7	1	12	14

β ♮ 4 6 9 15 13 11 8 2 7 1 14 12 10 16 3 5	4 8 13 9 10 11 6 7 15 14 3 2 5 1 12 16	4 8 13 9 15 11 6 2 10 14 3 7 5 1 12 16	♪ 4 1 16 13 6 12 5 11 15 7 10 2 9 14 3 8
♪ 4 1 16 13 15 12 5 2 6 7 10 11 9 14 3 8	♪ 4 6 15 9 14 12 7 1 3 5 10 16 13 11 2 8	♪ 4 6 9 15 14 12 1 7 11 13 8 2 5 3 16 10	♪ 4 14 3 13 15 12 5 2 6 7 10 11 9 1 16 8
♪ 4 1 15 14 13 12 6 3 8 5 11 10 9 16 2 7	♪ 4 13 8 9 15 12 5 2 1 6 11 16 14 3 10 7	♪ 4 6 15 9 14 12 7 1 11 13 2 8 5 3 10 16	γ 4 1 14 15 16 13 2 3 9 12 7 6 5 8 11 10
γ 4 1 15 14 16 13 3 2 5 8 10 11 9 12 6 7	γ 4 6 15 9 11 13 8 2 5 3 10 16 14 12 1 7	γ 4 6 9 15 11 13 2 8 14 12 7 1 5 3 16 10	γ 4 1 15 14 16 13 3 2 9 12 6 7 5 8 10 11
γ 4 1 14 15 16 13 2 3 5 8 11 10 9 12 7 6	γ 4 7 9 14 10 13 3 8 15 12 6 1 5 2 16 11	γ 4 7 14 9 10 13 8 3 5 2 11 16 15 12 1 6	γ 4 6 15 9 11 13 8 2 14 12 1 7 5 3 10 16

γ

4	7	14	9
10	13	8	3
15	12	1	6
5	2	11	16

δ

4	1	16	13
5	14	3	12
15	8	9	2
10	11	6	7

γ

4	1	13	16
15	14	2	3
10	11	7	6
5	8	12	9

β

4	1	16	13
15	14	3	2
5	8	9	12
10	11	6	7

γ

4	5	10	15
11	14	1	8
13	12	7	2
6	3	16	9

β

4	5	15	10
11	14	8	1
6	3	9	16
13	12	2	7

δ

4	11	6	13
15	14	3	2
5	8	9	12
10	1	16	7

4	2	13	15
9	14	3	8
16	11	6	1
5	7	12	10

4	2	13	15
16	14	3	1
9	11	6	8
5	7	12	10

4	2	13	15
5	14	3	12
16	7	10	1
9	11	8	6

4	2	13	15
16	14	3	1
5	7	10	12
9	11	8	6

δ

4	1	16	13
9	14	3	8
15	12	5	2
6	7	10	11

β

4	1	16	13
15	14	3	2
9	12	5	8
6	7	10	11

γ

4	1	13	16
15	14	2	3
6	7	11	10
9	12	8	5

β

4	7	10	13
9	14	3	8
15	12	5	2
6	1	16	11

β

4	7	13	10
9	14	8	3
6	1	11	16
15	12	2	5

δ

4	7	10	13
15	14	3	2
9	12	5	8
6	1	16	11

γ

4	5	16	9
11	14	7	2
13	12	1	8
6	3	10	15

γ

4	7	13	10
9	14	8	3
16	11	1	6
5	2	12	15

δ

4	3	14	13
5	15	2	12
16	10	7	1
9	6	11	8

δ

4	3	14	13
16	15	2	1
5	10	7	12
9	6	11	8

4	3	13	14
16	15	1	2
5	10	8	11
9	6	12	7

δ

4	5	16	9
6	15	10	3
11	2	7	14
13	12	1	8

δ

4	6	11	13
16	15	2	1
5	10	7	12
9	3	14	8

δ

4	1	16	13
5	15	2	12
14	8	9	3
11	10	7	6

γ

4	1	13	16
14	15	3	2
11	10	6	7
5	8	12	9

β

4	1	16	13
14	15	2	3
5	8	9	12
11	10	7	6

γ

4	5	11	14
10	15	1	8
13	12	6	3
7	2	16	9

β

4	5	14	11
10	15	8	1
7	2	9	16
13	12	3	6

δ

4	10	7	13
14	15	2	3
5	8	9	12
11	1	16	6

δ

4	1	16	13
9	15	2	8
14	12	5	3
7	6	11	10

β

4	1	16	13
14	15	2	3
9	12	5	8
7	6	11	10

γ

4	1	13	16
14	15	3	2
7	6	10	11
9	12	8	5

β

4	6	11	13
9	15	2	8
14	12	5	3
7	1	16	10

γ

4	6	13	11
9	15	8	2
7	1	10	16
14	12	3	5

δ

4	6	11	13
14	15	2	3
9	12	5	8
7	1	16	10

4	1	16	13
11	15	6	2
14	10	3	7
5	8	9	12

4	8	9	13
11	15	6	2
14	10	3	7
5	1	16	12

γ

4	5	16	9
10	15	6	3
13	12	1	8
7	2	11	14

γ

4	6	13	11
9	15	8	2
16	10	1	7
5	3	12	14

♪			
4	2	15	13
5	16	1	12
14	9	8	3
11	7	10	6
♪			
4	2	15	13
14	16	1	3
5	9	8	12
11	7	10	6
♪			
4	2	15	13
7	16	1	10
14	11	6	3
9	5	12	8
♪			
4	2	15	13
14	16	1	3
7	11	6	10
9	5	12	8
♪			
4	5	12	13
7	16	1	10
14	11	6	3
9	2	15	8
♪			
4	5	12	13
14	16	1	3
7	11	6	10
9	2	15	8
♪			
4	5	14	11
7	16	9	2
10	1	8	15
13	12	3	6
♪			
4	7	10	13
14	16	1	3
5	9	8	12
11	2	15	6
β			
4	1	14	15
13	16	3	2
11	10	5	8
6	7	12	9
β			
4	1	15	14
13	16	2	3
6	7	9	12
11	10	8	5
β			
4	1	15	14
13	16	2	3
10	11	5	8
7	6	12	9
β			
4	1	14	15
13	16	3	2
7	6	9	12
10	11	8	5
4	3	14	13
10	16	7	1
15	9	2	8
5	6	11	12
4	6	11	13
10	16	7	1
15	9	2	8
5	3	14	12
γ			
4	5	14	11
9	16	7	2
15	10	1	8
6	3	12	13
γ			
4	5	15	10
9	16	6	3
14	11	1	8
7	2	12	13
γ			
5	11	10	8
16	2	3	13
4	14	15	1
9	7	6	12
β			
5	12	9	8
15	2	3	14
4	13	16	1
10	7	6	11
γ			
5	10	11	8
16	3	2	13
4	15	14	1
9	6	7	12
β			
5	12	9	8
14	3	2	15
4	13	16	1
11	6	7	10

γ	γ	δ	β
5 9 12 8	5 9 12 8	5 10 11 8	5 10 11 8
16 4 1 13	16 4 1 13	14 4 1 15	15 4 1 14
3 15 14 2	2 14 15 3	3 13 16 2	2 13 16 3
10 6 7 11	11 7 6 10	12 7 6 9	12 7 6 9
β	δ	δ	δ
5 11 10 8	5 11 10 8	5 4 13 12	5 11 8 10
14 4 1 15	15 4 1 14	11 6 3 14	15 6 9 4
3 13 16 2	2 13 16 3	8 9 16 1	2 3 16 13
12 6 7 9	12 6 7 9	10 15 2 7	12 14 1 7
δ	δ		
5 4 13 12	5 10 8 11	5 2 15 12	5 13 4 12
10 7 2 15	14 7 9 4	16 8 1 9	16 8 1 9
8 9 16 1	3 2 16 13	3 11 14 6	3 11 14 6
11 14 3 6	12 15 1 6	10 13 4 7	10 2 15 7
		ε	ε
5 3 14 12	5 13 4 12	5 4 14 11	5 4 15 10
16 8 1 9	16 8 1 9	16 9 7 2	16 9 6 3
2 10 15 7	2 10 15 7	3 6 12 13	2 7 12 13
11 13 4 6	11 3 14 6	10 15 1 8	11 14 1 8
δ	δ	δ	δ
5 3 16 10	5 3 16 10	5 6 11 12	5 15 2 12
6 9 4 15	15 9 4 6	16 9 8 1	16 9 8 1
11 8 13 2	2 8 13 11	3 4 13 14	3 4 13 14
12 14 1 7	12 14 1 7	10 15 2 7	10 6 11 7

♪	♪	♪	β
5 2 15 12	5 8 10 11	5 3 14 12	5 3 14 12
8 9 4 13	16 9 7 2	4 10 7 13	16 10 7 1
10 7 14 3	1 4 14 15	16 6 11 1	4 6 11 13
11 16 1 6	12 13 3 6	9 15 2 8	9 15 2 8
β	♪		
5 4 16 9	5 15 2 12	5 1 16 12	5 14 4 11
15 10 6 3	16 10 7 1	14 10 3 7	15 10 8 1
2 7 11 14	4 6 11 13	4 8 13 9	2 3 13 16
12 13 1 8	9 3 14 8	11 15 2 6	12 7 9 6
♪	β	β	♪
5 2 15 12	5 2 15 12	5 14 3 12	5 14 3 12
4 11 6 13	16 11 6 1	4 11 6 13	16 11 6 1
16 7 10 1	4 7 10 13	16 7 10 1	4 7 10 13
9 14 3 8	9 14 3 8	9 2 15 8	9 2 15 8
γ	γ	♪	♪
5 2 16 11	5 3 16 10	5 3 16 10	5 3 16 10
15 12 6 1	14 12 7 1	11 13 8 2	2 13 8 11
4 7 9 14	4 6 9 15	6 4 9 15	15 4 9 6
10 13 3 8	11 13 2 8	12 14 1 7	12 14 1 7
♪	♪	♪	♪
5 2 15 12	5 11 6 12	5 4 14 11	5 4 14 11
16 13 4 1	16 13 4 1	16 13 3 2	2 13 3 16
3 8 9 14	3 8 9 14	1 8 10 15	15 8 10 1
10 11 6 7	10 2 15 7	12 9 7 6	12 9 7 6

δ

5	3	16	10
4	14	1	15
13	11	8	2
12	6	9	7

δ

5	3	16	10
15	14	1	4
2	11	8	13
12	6	9	7

5	1	16	12
10	14	7	3
8	4	9	13
11	15	2	6

5	10	8	11
15	14	4	1
2	7	9	16
12	3	13	6

β

5	3	16	10
12	14	1	7
9	15	4	6
8	2	13	11

γ

5	4	16	9
11	14	2	7
10	15	3	6
8	1	13	12

δ

5	2	16	11
4	15	1	14
13	10	8	3
12	7	9	6

δ

5	2	16	11
14	15	1	4
3	10	8	12
12	7	9	6

β

5	2	16	11
12	15	1	6
9	14	4	7
8	3	13	10

γ

5	4	16	9
10	15	3	6
11	14	2	7
8	1	13	12

5	2	15	12
8	16	9	1
11	3	6	14
10	13	4	7

5	8	11	10
13	16	3	2
4	9	6	15
12	1	14	7

5	8	10	11
13	16	2	3
4	9	7	14
12	1	15	6

5	8	10	11
3	16	2	13
14	9	7	4
12	1	15	6

δ

5	2	15	12
10	16	1	7
11	13	4	6
8	3	14	9

β

5	2	15	12
11	16	1	6
10	13	4	7
8	3	14	9

β

5	3	14	12
10	16	1	7
11	13	4	6
8	2	15	9

δ

5	3	14	12
11	16	1	6
10	13	4	7
8	2	15	9

γ

5	4	14	11
9	16	2	7
12	13	3	6
8	1	15	10

γ

5	4	15	10
9	16	3	6
12	13	2	7
8	1	14	11

β	γ	γ	δ
6 11 10 7	6 12 9 7	6 10 11 7	6 9 12 7
16 1 4 13	15 1 4 14	15 3 2 14	13 3 2 16
3 14 15 2	3 13 16 2	4 16 13 1	4 14 15 1
9 8 5 12	10 8 5 11	9 5 8 12	11 8 5 10
β	β	δ	γ
6 9 12 7	6 12 9 7	6 12 9 7	6 10 11 7
16 3 2 13	13 3 2 16	16 3 2 13	15 3 2 14
1 14 15 4	4 14 15 1	1 14 15 4	1 13 16 4
11 8 5 10	11 5 8 10	11 5 8 10	12 8 5 9
γ	β	δ	δ
6 9 12 7	6 11 10 7	6 7 12 9	6 7 12 9
15 4 1 14	13 4 1 16	14 4 1 15	15 4 1 14
3 16 13 2	3 14 15 2	3 13 16 2	2 13 16 3
10 5 8 11	12 5 8 9	11 10 5 8	11 10 5 8
δ	δ	δ	δ
6 12 7 9	6 12 7 9	6 3 14 11	6 12 7 9
14 4 1 15	15 4 1 14	12 5 4 13	16 5 10 3
3 13 16 2	2 13 16 3	7 10 15 2	1 4 15 14
11 5 10 8	11 5 10 8	9 16 1 8	11 13 2 8
		δ	β
6 1 16 11	6 14 3 11	6 3 15 10	6 3 15 10
15 7 2 10	15 7 2 10	4 9 5 16	16 9 5 4
4 12 13 5	4 12 13 5	13 8 12 1	1 8 12 13
9 14 3 8	9 1 16 8	11 14 2 7	11 14 2 7

β	δ	α	α
6 4 13 11	6 15 3 10	6 3 13 12	6 3 16 9
15 9 8 2	16 9 5 4	15 10 8 1	15 10 5 4
3 5 12 14	1 8 12 13	4 5 11 14	1 8 11 14
10 16 1 7	11 2 14 7	9 16 2 7	12 13 2 7
γ	γ	δ	β
6 1 15 12	6 4 15 9	6 1 16 11	6 1 16 11
16 11 5 2	13 11 8 2	3 12 5 14	15 12 5 2
3 8 10 13	3 5 10 16	15 8 9 2	3 8 9 14
9 14 4 7	12 14 1 7	10 13 4 7	10 13 4 7
β	δ	δ	δ
6 3 15 10	6 13 4 11	6 3 14 11	6 4 15 9
13 12 8 1	15 12 5 2	4 13 12 5	16 13 2 3
4 5 9 16	3 8 9 14	15 2 7 10	1 12 7 14
11 14 2 7	10 1 16 7	9 16 1 8	11 5 10 8
γ	β		
6 3 15 10	6 4 15 9	6 7 12 9	6 7 12 9
12 13 1 8	11 13 2 8	14 15 4 1	1 15 4 14
9 16 4 5	10 16 3 5	3 10 5 16	16 10 5 3
7 2 14 11	7 1 14 12	11 2 13 8	11 2 13 8
γ	δ	β	β
6 3 13 12	6 1 16 11	6 1 16 11	6 4 13 11
10 15 1 8	9 15 2 8	12 15 2 5	9 15 2 8
11 14 4 5	12 14 3 5	9 14 3 8	12 14 3 5
7 2 16 9	7 4 13 10	7 4 13 10	7 1 16 10

δ			
6 4 13 11			
12 15 2 5			
9 14 3 8			
7 1 16 10			
	γ		
	6 3 16 9		
	10 15 4 5		
	11 14 1 8		
	7 2 13 12		
		δ	
		6 2 15 11	
		7 16 1 10	
		12 13 4 5	
		9 3 14 8	
			δ
			6 2 15 11
			12 16 1 5
			7 13 4 10
			9 3 14 8
δ			
6 3 14 11			
7 16 1 10			
12 13 4 5			
9 2 15 8			
	δ		
	6 3 14 11		
	12 16 1 5		
	7 13 4 10		
	9 2 15 8		
		β	
		6 1 15 12	
		11 16 2 5	
		10 13 3 8	
		7 4 14 9	
			γ
			6 3 15 10
			9 16 4 5
			12 13 1 8
			7 2 14 11
δ			
7 6 11 10			
14 3 2 15			
4 13 16 1			
9 12 5 8			
	δ		
	7 12 5 10		
	14 3 2 15		
	4 13 16 1		
	9 6 11 8		
		δ	
		7 5 12 10	
		16 4 1 13	
		2 14 15 3	
		9 11 6 8	
			δ
			7 11 6 10
			16 4 1 13
			2 14 15 3
			9 5 12 8
δ			
7 2 15 10			
12 5 4 13			
6 11 14 3			
9 16 1 8			
	δ		
	7 16 1 10		
	12 5 4 13		
	6 11 14 3		
	9 2 15 8		
		δ	
		7 1 16 10	
		14 6 3 11	
		4 12 13 5	
		9 15 2 8	
			δ
			7 15 2 10
			14 6 3 11
			4 12 13 5
			9 1 16 8
δ			
7 2 15 10			
4 13 12 5			
14 3 6 11			
9 16 1 8			
	δ		
	7 4 14 9		
	16 13 3 2		
	1 12 6 15		
	10 5 11 8		
		δ	
		7 1 16 10	
		6 14 11 3	
		12 4 5 13	
		9 15 2 8	
			δ
			7 6 12 9
			15 14 4 1
			2 11 5 16
			10 3 13 8

Digitized by Google

♪				♪											
7	2	16	9	7	2	16	9	7	4	14	9	7	4	14	9
6	15	1	12	12	15	1	6	11	16	2	5	5	16	2	11
11	14	4	5	5	14	4	11	6	13	3	12	12	13	3	6
10	3	13	8	10	3	13	8	10	1	15	8	10	1	15	8

α	48
β	192
γ	192
♪	328
. . . . .	120
Somme	880

NOMBRE DES TABLES de chaque ſorte.

DE celles qui ont 1 à l'un des coins, il y en a		208	208
De celles qui ont	2	200	200
	3	204	166
	4	238	178
	5	216	64
	6	206	48
	7	230	16
		Somme	880

Mais parce que des Tables qui ont à l'un des coins, 3, 4, 5, 6, ou 7, ont auſſi à d'autres coins des nombres moindres, comme 1 ou 2, &c. on a mis enſuite la multitude des Tables qui ont quelqu'un de ces nombres à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands. Ainſi il y a 204 Tables, qui ont trois à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que cent ſoixante-ſix qui ayent 3 à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands que 3. De même il y a deux cens trente Tables qui ont 7 à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que ſeize qui n'ayent à aucun de leurs coins des nombres moindres que 7.

A	6	3	13	12
	15	10	8	1
	4	5	11	14
	9	16	2	7

Les Tables qui ont cette marque α en tête, ont cette proprieté,

proprieté, que quatre nombres étant pris en quarré dans cette Table en quelque façon que ce ſoit, font autant qu'un des côtez. Ainſi en la Table A, les nombres pris en quarré en tout ſens, comme 6, 15, 3, 10, | 3, 10, 13, 8, | 13, 8, 12, 1, | 15, 10, 4, 5, | 10, 8, 5, 11, | 8, 1, 11, 14, | 4, 9, 16, 5, | 5, 16, 11, 2, | & 11, 2, 14, 7, | font 34, ſçavoir autant que chacun des côtez. De même ſi

6	3	13	12
15	10	8	1
4	5	11	14
9	16	2	7

on prend les angles des quarrez de 3 de côté; ſçavoir 6, 4, 11, 13, | 3, 5, 14, 12, | 15, 8, 9, 2, | & 10, 1, 16, 7, & auſſi les angles du quarré total, 6, 12, 9, 7, ils feront tous pareille ſomme de 34; & de ces Tables il y en a en tout 48, & on peut faire 12 Tables qui auront chacune des nombres à un des angles. Par exemple, il y a 12 Tables qui ont 1 à l'un des angles, 12 qui ont 2, autant qui ont 3, 4, 5 ou 6, &c. mais parce qu'il y a quatre nombres enſemble à chaque Table, cela ſe réduit à 48.

B					C				
	6	3	15	10		6	1	16	11
	13	12	8	1		12	15	2	5
	4	5	9	16		9	14	3	8
	11	14	2	7		7	4	13	10

Les Tables qui ont cette marque β au-deſſus, ont la même égalité que devant, ſinon qu'au milieu d'un des côtez & à ſon oppoſé, il y a un des quarrez dont les nombres ne ſont pas égaux à ceux d'un des côtez. Ainſi en la Table B, les nombres 3, 15, 12, 8, & 5, 9, 14, 2, ne font pas 34; & en la Table C, les nombres 12, 16, 9, 14, & 2,

5, 3, 8 ne font pas 34. Mais ſi on prend les huit enſemble, ils font le double de 34, puiſqu'ils comprennent deux lignes; & de ces Tables il y en a en tout 192.

D

6	3	15	10
12	13	1	8
9	16	4	5
7	2	14	11

Les Tables marquées γ, n'ont que les quarrez des angles qui ayent cette égalité avec celui du milieu, mais non pas ceux du milieu des côtez. Ainſi la Table D a égalité dans les nombres 6, 12, 3, 13, | 15, 1, 8, 10, | 9, 16, 7, 2, | 4, 5, 14, 11, | & 13, 1, 16, 4, | & pareillement aux nombres des angles des quarrez de 3 de côté; ſçavoir 6, 15, 4, 9, | 10, 3, 16, 5, | 7, 12, 1, 14, | & 2, 13, 8, 11; & enfin au quarré total, 6, 7, 10, 11: & de ces Tables il y en a en tout 192.

E

c			d
6	13	4	11
15	12	5	2
3	8	9	14
10	1	16	7
a			b

F

6	3	14	11
4	13	12	5
15	2	7	10
9	16	1	8

Les Tables qui ont cette marque δ, n'ont égalité, outre les angles du grand quarré, & ceux du quarré du milieu, (auſquels il y a égalité dans toutes les Tables) que deux autres quarrez aux côtez oppoſez. Ainſi la Table E n'a égalité qu'aux nombres 13, 14, 12, 5, | & 8, 9, 1, 16, | & en outre aux angles exterieurs, 6, 11, 10, 7, & au quarré du milieu, 12, 5, 8, 9. Et la Table F n'a égalité

qu'aux nombres 4, 13, 15, 2, & 12, 5, 7, 10; & aux angles exterieurs 6, 11, 9, 8; & au quarré du milieu, 13, 12, 2, 7: & de ces Tables il y en a 328. Or ces égalitez ſe doivent toûjours entendre outre les lignes qui ſont ſuppoſées égales entr'elles.

Les autres Tables qui n'ont point de marque, n'ont rien que ce qui eſt commun à toutes; ſçavoir le petit quarré du milieu, & le grand du dehors, où il y ait égalité aux nombres des angles; & de ces Tables il y en a 120.

Or on démontrera, comme il s'enſuit, que les nombres qui ſont aux angles de l'enceinte exterieure de la Table de 4, & pareillement les quatre interieurs, ſont égaux à une des lignes. Par exemple, au quarré E les quatre nombres 6, 11, 10, 7 valent neceſſairement 34, & pareillement 12, 5, 8, 9, ſçavoir autant qu'une des lignes.

En la Table E, ſi les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ne valent pas enſemble 34, il faut qu'ils faſſent plus ou moins de 34, qu'ils valent moins. Mais parce que les nombres de chaque ligne doivent faire 34, les lignes *a b*, & *c d* feront chacune 34. Il faudra donc que les quatre nombres qui ſont entre les angles dans les lignes *a b*, & *c d*, faſſent enſemble plus de 34, & ils doivent ſurpaſſer 34 d'un nombre égal à celui de l'excès de 34, pardeſſus les nombres des angles *a*, *b*, *c*, *d*, & pareillement les quatre nombres qui ſont entre les angles des lignes *c a*, & *d b*; ſçavoir ceux qui ſeront à la place où ſont 15, 3, 2, 14, excederont 34 d'un nombre égal à celui dont 34 excede les nombres des angles; & par conſéquent les nombres qui ſont à l'enceinte exterieure entre les angles, excederont deux fois 34 du double du même excès. Mais les 16 nombres enſemble doivent faire quatre fois 34: & partant les huit nombres qui reſtent, ſçavoir les quatre des angles, *a*, *b*, *c*, *d*, & les quatre interieurs qui doivent être mis à la place où ſont 12, 5, 8, 9, ſeront moindres que deux fois 34, du double du même excès: mais les quatre qui ſont aux angles

a, *b*, *c*, *d*, ſont moindres que 34, ſelon le même excès; donc les quatre interieurs ſeront moindres auſſi que 34, ſelon le même excès. Et parce que toutes les lignes doivent être égales, poſons que l'une des lignes tranſverſales, comme *c b*, contienne quatre nombres, qui enſemble faſſent 34, il s'enſuivra que les quatre autres contenus en la ligne *a d*, feront moins de 34, du double de l'excès de 34, par-deſſus les quatre qui ſont aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe: la même choſe ſe fera voir, ſi on ſuppoſe les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, plus grands que 34; car on montrera de même, que les nombres d'une des lignes tranſverſales ſeront plus grands que 34 du double de l'excès; & partant les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ſont égaux à 34. Ce qu'il falloit démontrer.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*k*	*l*	*m*
n	*o*	*p*	*q*

Mais la même choſe ſe démontrera bien plus briévement, comme s'enſuit. En la Table *a*, *d*, *n*, *q*, les quatre nombres des angles *a*, *d*, *n*, *q*, ſont égaux aux quatre interieurs *f*, *g*, *k*, *l*; car les quatre, *a*, *d*, *n*, *q*, ſont complémens à deux lignes (ſçavoir à 68) des quatre nombres, *b*, *c*, *o*, *p*, & les quatre *f*, *g*, *k*, *l*, des quatre *e*, *i*, *h*, *m*. Mais les mêmes huit nombres, *a*, *d*, *n*, *q*, *f*, *g*, *k*, *l*, font enſemble deux lignes, ſçavoir les deux diagonales; & partant, tant les quatre *a*, *d*, *n*, *q*, que les quatre *f*, *g*, *k*, *l*, font autant qu'une ligne. Et de là il s'enſuit auſſi, qu'en toute Table les quatre *b*, *c*, *o*, *p*, font une ligne, & pareillement les quatre *e*, *i*, *h*, *m*.

En toute Table ou quarré qui a quatre de côté, les quatre nombres qui ſont à l'un des angles de la figure, com-

me *a*, *b*, *e*, *f*, ſont égaux aux quatre nombres, *l*, *m*, *p*, *q*, qui ſont à l'angle diametralement oppoſé, parce que les uns & les autres ſont le complément à deux lignes des quatre nombres, *c*, *d*, *g*, *h*.

Pareillement, en toute Table les quatre nombres des angles d'un des quarrez de trois, comme *a*, *e*, *l*, *i*, ſont égaux aux quatre *f*, *h*, *q*, *o*, du quarré oppoſé, parce que les uns & les autres ſont le complément à deux lignes des quatre *b*, *d*, *m*, *k*.

Si en quelque Table de 4, les quatre nombres d'un des petits quarrez des angles, comme de *a*, *b*, *f*, *e*, ſont enſemble égaux à une ligne; les autres petits quarrez des angles, comme *c*, *d*, *g*, *h*, &c. le ſeront auſſi; & pareillement les nombres des angles du quarré de 3, comme *a*, *c*, *l*, *i*, ou *b*, *d*, *m*, *k*, &c.

La raiſon eſt, que *a*, *b*, *f*, *e*, étant égaux aux quatre *l*, *m*, *q*, *p*, comme on vient de démontrer, ſi les uns valent une ligne, les autres en vaudront autant. Et pareillement les autres petits quarrez, ſçavoir *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, qui ſont leurs complémens à deux lignes.

Mais puiſque les huit, *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, valent deux lignes par ſuppoſition, ſi on en ôte une ligne, ſçavoir *d*, *g*, *k*, *n*, le reſte, qui ſont les quatre *c*, *h*, *i*, *o*, vaudront auſſi une ligne; & ainſi les huit, *a*, *c*, *l*, *i*, & *h*, *f*, *o*, *q*, qui ſont les angles des deux quarrez de trois oppoſez, vaudroient deux lignes, puiſque les huit nombres ſont les quatre *c*, *i*, *o*, *h*, qui valent une ligne, & les quatre de la diagonale, *a*, *f*, *l*, *q*: mais on a démontré, que les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, ſont égaux aux quatre *h*, *f*, *o*, *q*,: donc tant les uns que les autres valent une ligne.

On montrera de même, que ſi les quatre des angles du quarré de trois, comme *a*, *c*, *l*, *i*, valent une ligne, chacun des petits quarrez des angles, comme *a*, *b*, *e*, *f*, &c. vaudront une ligne.

Car ſi les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, valent une ligne, les quatre

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

Par M. BLONDEL.

Digitized by Google

A MONSEIGNEUR COLBERT, MINISTRE ET SECRETAIRE D'ETAT, SURINTENDANT DES BASTIMENS, ARTS ET MANUFACTURES DE FRANCE.

MONSEIGNEUR,

L'eſtime que vous avez pour les beaux Arts, oblige tous ceux qui en font profeſſion, de vous re-

garder comme leur Protecteur. Chacun vous offre les fruits de ſon travail comme des biens qui vous appartiennent ; & je vous préſente celui-ci dans le même ſentiment, & avec une parfaite reconnoiſſance de la bonté que vous avez eûë de m'aſſurer qu'il ne vous ſeroit pas déſagréable.

Vous ſçavez, MONSEIGNEUR, *que toutes les parties des Mathématiques ſont recommandables par les avantages qu'elles apportent dans les affaires du monde ; qu'elles ſont utiles dans la Guerre & dans la Paix ; & que les grands Hommes s'en ſervent en tout temps, ou pour exercer leur valeur, ou pour montrer leur magnificence.*

Néanmoins l'Architecture eſt celle qu'ils conſidérent le plus, parce qu'elle acheve, pour ainſi dire, leur réputation, & qu'elle conſerve le ſouvenir de leurs victoires, en leur élevant de ſuperbes Trophées.

Un grand Roy comme le nôtre, dont la vie eſt pleine de merveilles, & qui a fait tant de choſes qui paroîtront incroyables à la poſtérité, doit en laiſſer des témoignages immortels, qui confirment ceux de l'Hiſtoire, & qui empêchent que les ſiecles ſuivans ne la traitent de fabuleuſe. Et rien ne le peut mieux faire que l'Architecture. Certaine-

ment, MONSEIGNEUR, *j'oſe dire que cet Art admirable ſervira plus à éterniſer la mémoire de* LOUIS LE GRAND, *que tous les autres Arts qui ſe vantent de donner l'immortalité.*

Mais, MONSEIGNEUR, *c'eſt un bonheur bien particulier pour nous, qui en faiſons notre principale étude, que Sa Majeſté ſe ſoit repoſé ſur vos ſoins, pour remettre l'Architecture dans ſon premier luſtre. Ce bel Art avoit beſoin que vous lui donnaſſiez un peu de ce temps précieux que vous employez ſi utilement au ſervice du Roy & de l'Etat, afin qu'il puiſſe non-ſeulement égaler aujourd'hui ſes ouvrages à la beauté de l'Antique, mais même les porter à un degré de perfection, où les anciens Edifices n'ont jamais été, ni dans la Grece, ni dans l'Empire Romain.*

Et comme le nom du Roy ſurpaſſe maintenant celui de tous les Heros de l'antiquité, il falloit un Miniſtre, auſſi habile & auſſi zelé pour ſa gloire, que vous l'êtes, pour laiſſer dans la France des Monumens ſi magnifiques & ſi durables de la proſperité de ſon regne, qu'ils puiſſent effacer un jour la grandeur de ces anciens Edifices, dont le temps ſemble reſpecter les ruines.

Pendant que la renommée va répandre par

toute la terre le bruit de ſes Exploits & célébrer ſes Conquêtes & les prodiges inoüis de ſon courage, il eſt bien juſte que l'Architecture & tous les beaux Arts travaillent à l'envi pour rehauſſer l'éclat de ſes Triomphes, & conſacrer la mémoire de ſes grandes actions. Je voudrois bien, MONSEIGNEUR, *que ce Traité y pût contribuer quelque choſe : Du moins vous puis-je aſſurer que je ne l'ai compoſé que dans cette vûë, & pour communiquer au Public ce que je puis avoir acquis de nouvelles connoiſſances touchant les pratiques les plus difficiles qui ſe rencontrent dans les Bâtimens. Je m'eſtimerai trop recompenſé de mon travail, ſi vous me faites la grace de l'approuver, & d'être perſuadé que je ſuis avec beaucoup de reſpect,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très obéiſſant ſerviteur, BLONDEL.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

DECRIRE *Géometriquement en pluſieurs manieres, & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.*

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'APOLLONIUS *François des Tactions ; ou trouver une Section Conique qui touche trois lignes droites données en un même plan, & deux de ces lignes en un point donné de chacune : ou bien, décrire Géometriquement les Arcs rampans ſur toutes ſortes de pieds droits & de hauteur.*

TROISIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER *Géometriquement les joints de tête de toutes ſortes d'Arcs rampans.*

QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER *la ligne ſur laquelle les Poutres doivent être coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & réſiſtantes.*

Avec la démonſtration des Pratiques, accompagnées de diverſes réflexions ſur le mouvement,

ſur la proportion Harmonique, & ſur les erreurs de Pappus au ſujet de l'inſcription des trois médiétez au demi-cercle, & de Galilée au ſujet du dernier Problême.

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

Décrire Géometriquement en pluſieurs manieres & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.

PREMIER DISCOURS.

SI les divers emplois que j'ai eûs pour le ſervice du Roy chez les Etrangers & dans les principales Provinces de ce Royaume, m'ont donné l'avantage de pouvoir conſidérer à loiſir la plus grande partie des Bâtimens anciens & modernes qui ſont

dans le monde ; & ſi cette facilité jointe à une inclination particuliere que j'ai toujours euë pour l'Architecture, & qui m'a fait ſoigneuſement rechercher ce qui pouvoit être de plus remarquable en chacun d'eux, peut m'avoir accoutumé les yeux à quelque diſcernement de ce qu'on appelle *Grand* & *Beau* dans cet Art : il me ſemble que j'ai quelque droit de dire mes ſentimens ſur ſon ſujet & d'aſſurer que l'Architecture a beſoin d'étude, pour arriver à ſa perfection. Et quoique je ne ſois pas aſſez ſçavant pour me vanter de connoître ce qui lui manque, (cet Art ſuppoſant un trop grand amas de connoiſſances profondes & une expérience conſommée ;) je reſſens au moins une joye extraordinaire, lors que je voi qu'il s'y fait quelque progrès.

C'eſt ce qui fait que j'ai beaucoup eſtimé la penſée de celui qui propoſa pour *Etrénes à tous les Architectes*, au commencement de l'année 1664. un *Paradoxe*, comme il dit, c'eſt-à-dire, un Problême *à réſoudre touchant la perfection de l'enflûre ou renflement des Colonnes, touchée imparfaitement par Vitruve & non encore reſoluë ni reglée qu'imparfaitement, quoi qu'Architectoniquement elle le puiſſe être parfaitement*, qui ſont les termes dont il s'eſt ſervi.

Et j'ai crû, dis-je, qu'un homme étoit doublement loüable, qui ne ſe contentant pas de rechercher ce qui n'eſt pas encore connu dans les Sciences, & de conſacrer au Public le fruit de ſon travail & de ſes veilles, vouloit encore exciter les autres à ſon exemple, & réveilloit leur vertu endormie, en leur propoſant à réſoudre ce qu'il auroit déja pû reconnoître par ſon étude. D'autant plus que c'eſt à un ſentiment tout ſemblable que nous devons ce que nous avons de plus beau dans les Mathématiques, & qu'il paroît qu'il ne s'eſt jamais fait de plus notables progrès dans ces ſciences, que lors que les grands Genies ſe ſont, dans divers ſiécles, propoſez l'un à l'autre des queſtions, & que par une eſpece d'émulation honnête leur ame s'eſt enflammée de cette généreuſe ambition, qui nous a produit

duit des Ouvrages ſi excellens, qu'ils ſemblent être plûtôt partis de l'intelligence des Anges, que de la méditation laborieuſe de l'eſprit humain.

Et comme l'Architecture n'a reçû ce qu'elle a de bon & de magnifique que des Sciences Mathématiques, qui par l'indubitable verité de leurs démonſtrations rempliſſent entierement la capacité de notre eſprit, & ne lui laiſſent rien à déſirer ſur le ſujet qu'elles lui ont expliqué : il eſt aiſé de comprendre que c'eſt d'elles qu'elle doit encore attendre ce qui manque à ſa perfection ; & que cette lumiere, par qui l'on connoît la difference qu'il y a de pouvoir rendre raiſon de ſon Ouvrage, ou de travailler en tâtonnant, & à l'aveugle, ne lui peut venir que des mains libérales de la Géometrie.

Combien donc ſeroit-il à ſouhaiter, que ceux qui travaillent en Architecture vouluſſent auſſi s'appliquer aux Mathématiques, ou que ceux qui ſe ſont avancez dans ces ſciences donnaſſent auſſi quelque partie de leur temps à l'Architecture ? Et l'on doit pour ce ſujet eſtimer & recevoir agréablement toutes les choſes qui peuvent contribuer à porter les hommes à cette étude, au nombre deſquelles je mettrois ce *Paradoxe*, ſi l'Auteur s'y étoit un peu plus clairement expliqué qu'il n'a fait, & s'il avoit donné à entendre quelle eſt cette maniere de diminuer les Colonnes qu'il appelle *Parfaite :* parce que ces ſortes de diſpoſitions, qui ne ſont que pour la ſatisfaction de l'œil, & qui n'ont point de fondement certain ni arrêté dans la nature, dépendent tellement du goût, & de la diverſité des opinions, qu'une Colonne peut paroître aux uns trop *Suelte*, ainſi que les Italiens les appellent, ou déliée, que d'autres la trouveront trop écraſée.

De ſorte, qu'il ſemble que pour travailler avec quelque fruit à la ſolution de ſon *Paradoxe*, il auroit été juſte qu'il eut déterminé ce qu'il entend par ce mot de *Parfaitement*, & qu'on put comprendre, ſi cette façon de deſ-

cription qu'il propoſe *à réſoudre Architectoniquement*, eſt déja en quelque uſage, au moins méchanique, parmi les Ouvriers, ou ſi c'eſt une maniere toute nouvelle, & d'une forme differente de toutes celles dont on a juſqu'ici diminué les Colonnes : étant vrai que ces Propoſitions vagues & indéterminées, & en l'explication deſquelles le ſort a plus de part que le raiſonnement ou la vivacité de l'imagination, ſont d'autant plus défectueuſes, que l'honneur même qui ſeroit dû à celui qui auroit expliqué l'enigme, ne dépend que du caprice de celui qui propoſe, lequel peut diſſimuler tant qu'il lui plaît, & toujours dire que l'on n'a pas encore trouvé ce qu'il demande.

Tant y a, que m'étant ſouvenu d'avoir autrefois remarqué, en traçant des Colonnes à la maniere que Vignole enſeigne pour les Ioniques & Corinthiennes, que la ligne de leur Contour étoit celle de Nicomédes : je dis à M. Boſſe, qui me fit voir au mois de Janvier de la même année 1664. ces *Etrènes à tous les Architectes*, que bien que je n'euſſe point l'art de deviner, & que je confeſſaſſe ingenuëment mon ignorance ſur le ſujet de ce *Paradoxe*, je voulois néanmoins propoſer plus nettement un Problême de la même nature à ſon Auteur, que je mis par maniere de jeu ſur le dos de ſon écrit, en ces termes. *Autre Problême. Le moyen de décrire tout d'un trait, & ſans s'embaraſſer de pluſieurs points trouvez dont on ſe ſert pour les Cherches, la maniere la plus élegante qui ſoit en uſage parmi les Architectes modernes pour l'ἔντασις & diminution des Colonnes ? Et quelle en eſt la figure ?*

Quelques jours après le ſieur Boſſe m'ayant prié de lui vouloir expliquer ma penſée, je lui fis ſur ce ſujet la Lettre qui fait le diſcours ſuivant.

SECOND DICOURS,
OU
LETTRE A M. BOSSE

Sur le même ſujet de l'enflûre & diminution des Colonnes, & de la deſcription de la ligne qui fait le Contour des Ioniques, Corinthiennes, & Compoſées.

MOnſieur, je n'ai pas la ſcience de deviner pour vous dire quels ſont les ſentimens de celui dont vous me parlez ſur le Problême ou *Paradoxe*, comme il dit, qu'il a propoſé pour *Etrênes à tous les Architectes :* mais je puis bien vous entretenir de la ſolution de celui que j'écrivis dernierement au dos de ſon imprimé, dans laquelle je vous aſſurerai premierement avec franchiſe que je n'ai aucune part, puiſqu'il y a plus de deux mille ans qu'elle eſt trouvée, & que je ne puis tout au plus me glorifier d'autre choſe, que de m'être autrefois apperçû, en deſſeignant des Colonnes diminuées à la maniere élegante que Vignole dit avoir inventée pour les Ioniques & Corinthiennes, que *la Cherche courbe qui la décrit, eſt la ligne de Nicomédes, que l'on appelle la premiere Conchoïde des Anciens*; & par le moyen de laquelle, au rapport d'Eutocius, ce Géometre prétendit avoir réſoulu ce fameux Problême *de la Duplication du Cube commandée par l'Oracle*, & qui a tant exercé les eſprits du ſiecle de Platon dans la recherche *de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données.* C'eſt celle-là même que M. Viette a de notre temps ſuppoſée comme une pétition ou demande au ſupplément de Géométrie pour réſoudre tous les Problêmes ſolides, & dont les Equations vont au Cube ou au quarré quarré ; ne jugeant pas que ſa deſcription, par le moyen de l'Inſtrument de Nicomédes, fut plus méchanique, ou pour mieux

dire, moins Géometrique, que celle du Cercle par le moyen du Compas, dont l'uſage eſt néanmoins reçû par ce principe de pétition ou demande dans le premier des Elemens d'Euclide. Et quoique ces mêmes Equations ſe reſolvent plus noblement dans les livres de M. Deſcartes, par la ſeule interſection du Cercle & de la Parabole, qui ſont lignes d'un genre plus ſimple & moins compoſé que la Conchoïde; celle-ci ne laiſſe pas d'avoir ſes uſages pour les ſolutions des Equations plus élevées, & les ſuppoſitions de M. Viette ſont très-ſçavantes & très-véritables.

Mais pour retourner à notre propos: Quoique vous ſçachiez parfaitement cette invention élegante de Vignole, & que vous la puiſſiez voir dans ſon Livre, je ne laiſſerai pas de vous en tracer ici la figure avec ſon diſcours, ſelon la traduction de l'illuſtre M. le Muet, afin que vous puiſſiez mieux juger du raiſonnement que je ferai enſuite.

Fig. I. de la I. Planche. *Quant à cette autre façon*, dit-il, *je l'ai trouvée de moi-même; & quoiqu'elle ſoit moins connuë, elle eſt néanmoins facile à concevoir par les lignes. Je dirai donc qu'ayant réſolu les meſures de la Colonne*, c'eſt-à-dire, ſa hauteur & groſſeur, & la diminution qu'elle doit avoir au bout d'enhaut, *on doit tirer une ligne à l'infini en commençant par C*, qui eſt au tiers du fuſt de la Colonne, *& continuant par D; puis rapportant la meſure C D au point A*, où finit la diminution du haut, *juſqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire au point B, & que A B ſoit continuée juſqu'en E. De là on pourra tirer tant de lignes qu'on voudra qui partiront de la perpendiculaire, & iront à la circonférence de la Colonne, ſur leſquelles appliquant la meſure C D, on trouvera tant en haut qu'en bas l'enflûre de la Colonne; & cette maniere peut être appliquée à l'Ionique, Corinthien & Compoſé.*

Ou vous voyez, Monſieur, que toutes ces lignes qui, partant du point E, ſont compriſes entre la Perpendiculaire ou Axe de la Colonne & ſa Circonférence, ſont toutes égales entre elles, & à la droite C D. De ſorte que

ſi nous appellons le point E, le *Pole*; l'Axe de la Colonne, *la Regle* ou *Canon*; & la ligne C D, *l'Intervalle*: je ne voi plus rien qui m'empêche d'appeller la ligne courbe qui paſſe depuis A par toutes les extrémitez recherchées, *la premiere Conchoïde des Anciens*, puiſque c'eſt toute la même; & que vous connoîtrez encore mieux par l'Inſtrument que Nicomédes a inventé pour la décrire, dont la figure eſt la ſeconde de la premiere Planche; en laquelle, après avoir déterminé comme deſſus la largeur de la Colonne, dont la moitié eſt C D, & trouvé la longueur de la ligne C E, il faut prendre trois regles de bois ou de métail G F, I D, H A, dont les deux G F, & I D, ſont attachées enſemble à l'équerre ou à angles droits comme en D; & par le milieu de la regle G F il faut entailler un petit canal à queuë d'aronde qui s'étende en toute la longueur de la regle. Il s'en fait une autre de même dans le milieu de la regle H A, qui s'étende indéfiniment vers le bout H, mais qui vers l'autre bout ſe termine en K, en ſorte néanmoins que la diſtance A K, ne ſoit pas plus grande que la diſtance C E. Enſuite il faut faire au bout de la regle H A vers le point A, la ligne A B égale à la ligne C D, & attacher par deſſous la regle au point B un bouton de bois ou de métail qui puiſſe couler juſte dans le canal de la regle G F. Il en faut attacher un autre ſemblable au point E, dans le milieu de la regle I D, qui coule juſte dans le canal de la regle A H, afin que la regle G F étant appliquée à l'Axe de la Colonne, en ſorte que le point D réponde au renflement, & la regle A H ſe mouvant en avançant ou reculant ſur le bouton E, comme ſur un pivot ou Pole, tandis que le bouton B ſe meut au long dudit Axe, c'eſt-à-dire, au long du Canal de la regle G F; le point A décrive par ces deux mouvemens la ligne courbe A *a a* C *a*, pour le contour de la diminution & renflement de la Colonne qui eſt appellée ἔντασις par Vitruve, & dans laquelle ligne toutes les droites, comme *b a*, tirées du Pole, &

Fig. II. de la I. Planche.

compriſes entre le Canal de la regle G F, c'eſt à-dire, entre l'Axe de la Colonne & ſa Circonférence, ſont toutes égales entr'elles, & à l'intervalle A B, ou C D. En quoi il paroît que la ligne courbe que cet inſtrument a décrite, eſt la même que celle que Vignole a prétendu décrire. Et ſi vos regles étant d'une grandeur indéfinie, vous faites en ſorte que les boutons B & E puiſſent tellement s'avancer ou reculer au long des regles A H & D I, que les intervalles, comme A B & C E, puiſſent auſſi être pris ſur leſdites regles de telle grandeur que l'on voudra; il eſt évident que cet inſtrument pourra ſervir à décrire les Courbes des Colonnes, de quelque hauteur ou groſſeur qu'elles puiſſent être, puiſque toute leur difference ne conſiſte qu'en celle deſdits intervalles. L'autre côté de la Colonne ſera décrit en la même maniere en changeant l'inſtrument de place, & le rapportant de l'autre part.

Ainſi, Monſieur, il me ſemble que mon Problême eſt aſſez bien réſolu par cet inſtrument; & que ſans s'embaraſſer à rechercher ces points infinis, comme veut Vignole, par leſquels on puiſſe mener doucement cette cherche, qui de ſoi dans la rigueur eſt toujours imparfaite, on peut dorénavant tirer cette ligne tout d'un trait, uniformement & en ſa perfection.

C'eſt de quoi j'ai voulu vous faire part, en attendant que nous ayons de l'Auteur du *Paradoxe* quelque choſe de conſidérable ſur cette matiere, ainſi qu'il y a lieu de l'eſperer par ſes *Etrénes*. Vous aſſurant au reſte que bien qu'il y ait raiſon d'être ſurpris, que depuis tant de ſiecles qui ont produit de ſi grands Hommes pour l'Architecture, leſquels ont ſi bien tracé les diminutions & l'enflûre des Colonnes, perſonne, au moins que je ſçache, n'ait fait réflexion à cette maniere de deſcription, que le ſeul Vignole, & que depuis lui tant de braves Architectes ſe ſoient heureuſement ſervis de ſon invention, ſans avoir rien dit de la nature de la Courbe qu'elle produit, ni du

moyen de la deſſeigner tout d'un trait : Quoiqu'il y ait, dis-je, beaucoup de ſujet de s'en étonner, je vous proteſte néanmoins que je n'ai aucune vanité que cette penſée me ſoit venuë, de laquelle je me glorifie moins que de l'honneur que vous me faites de m'aimer. Je ſuis, *&c.*

Ce 24. Janvier 1664.

TROISIEME DISCOURS.

SUR LA NATURE ET DESCRIPTION de la ligne qui fait le Contour des Colonnes Doriques & Toſcanes.

AYant ainſi diſcouru ſur les propriétez de la ligne Courbe qui fait le Contour des Colonnes Ioniques, Corinthiennes & compoſées, j'ai voulu conſidérer l'autre maniere que Vignole décrit, & dont il ſe ſert pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques. Et après avoir ſoigneuſement médité ſur la nature de la Ligne qu'elle produit ; j'ai reconnu que c'étoit une ligne de la même nature que celle que décriroit une fléche, ou toute autre choſe tirée & jettée horizontalement, dans l'opinion de ceux qui croyent qu'un poids tombant de la ſurface de la terre ſe trouveroit juſtement au bout de ſix heures au Centre (ſi la terre ſe mouvoit du mouvement journalier,) & paſſant outre par la force qu'il auroit acquiſe en ſa chûte, il arriveroit au bout d'autres ſix heures à la ſurface des Antipodes, ſi le chemin lui étoit ouvert : D'où deſcendant & repaſſant en ſix heures une autre fois par le Centre, il ſe trouveroit au bout d'un jour préfix au même lieu d'où il étoit premierement parti, ſi l'air, ou les autres empêchemens du dehors ne l'arrêtoient.

Je dis donc qu'un trait pouſſé vigoureuſement, & parallele à l'horizon décriroit en ſon paſſage une Ligne de la

même nature de celle dont on ſe ſert pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques, ſi cette opinion étoit veritable : parce qu'étant porté d'un mouvement de Lation égale & uniforme, qui lui eſt imprimé par l'impulſion, & qui fait que les diſtances qu'il parcourt ſont entre elles en même proportion que les temps qu'il employe à les parcourir, (c'eſt-à-dire, comme les Arcs de l'Equateur qui paſſent cependant ſous le Méridien,) & d'un autre mouvement inégal, & qui s'augmente continuellement, que ſon propre poids lui inſpire, & qui dans l'opinion ſuſdite ſe fait ſur la proportion des Sinus verſes des mêmes Arcs de l'Equateur ; il paroît que la Ligne, que ce trait décriroit en ſon paſſage, ſeroit compoſée de ces deux mouvemens, dont l'un eſt égal, uniforme, & répondant aux Arcs de l'Equateur ; l'autre inégal, continuellement précipité, & répondant aux Sinus verſes des mêmes Arcs.

Mais la Ligne du Contour des Colonnes Toſcanes & Doriques ſe fait par la compoſition de deux mouvemens pareils, ainſi que je le démontrerai cy-deſſous ; & partant la Ligne que décrivent les corps jettez horizontalement, comme un trait ou une fléche dans l'opinion ſuſdite, eſt à peu-près la même que celle dont on ſe ſert pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques.

Fig. I. de la II. Planche. Pour la démonſtration de ce que je viens de dire, il ne faut que ſe ſouvenir de la pratique ordinaire des Ouvriers pour la deſcription de cette Ligne, qui ſe fait en cette maniere. La Ligne A C, ſoit l'Axe d'une Colonne à diminuer, & les deux tiers de ſa longueur, ſi on veut que la diminution commence au tiers ; ou la moitié, ſi on deſire qu'elle commence dans le milieu de la Colonne : La Ligne A B, ſoit le module ou la moitié de ſa groſſeur, ſur laquelle comme rayon ſoit fait le Cercle B S T V Z. Enſuite il faut prendre la partie A G, pour le demi-diametre de la Colonne par le haut, en ſorte que B G ſoit ſa plus grande diminution, & tirer la ligne G E parallele à A C, qui coupera

coupera le Cercle en F, la portion duquel B F, doit être partagée en autant de parties égales qu'on voudra, comme aux points S, T, V, auſſi bien que l'Axe A C, aux points H, K, M, en ſorte que la ligne A C contienne autant de parties égales que l'Arc B F. Enfin des points des diviſions de l'Axe il faut élever des Perpendiculaires, comme H I, K L, M N, qui ſoient rencontrées aux points O, X & Y, par d'autres lignes paralleles à l'Axe, & tirées des points de l'Arc B F, de telle maniere qu'elles ſe répondent réciproquement l'une à l'autre, c'eſt-à-dire, que celle qui part du premier point de l'Axe H, comme H O I, ſoit rencontrée en O, par celle qui vient du premier point de l'Arc S, comme P S O, & celle qui part du ſecond point de l'Arc T, comme Q T X, ſe termine en X, ſur celle qui vient du ſecond point de l'Axe K, comme K X L, & ainſi des autres. Et paſſant par tous les points B O X Y E une ligne adoucie, elle fera celle que l'on cherche pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques.

Et ſi nous appellons le point B, *le ſommet* de cette ligne Courbe la ligne A B, l'*Axe* ou *le Diametre*, les lignes P O, Q X, R Y, G E, *&c. les ordonnées*; on verra que l'ordonnée Q X, contenant autant de parties de la ligne A C, ou de ſon égale G E, que l'Arc B T en contient de celles de l'Arc B F, l'ordonnée Q X, eſt à l'ordonnée G E, comme l'Arc B T, eſt à l'Arc B F; & la même choſe ſe pouvant dire de toutes les autres, il paroîtra que les ordonnées ſeront entre elles comme les Arcs qui ſont compris entre le ſommet & leſdites ordonnées: & partant que cette ligne Courbe eſt une eſpece de *Spirale ou Ovale.*

De plus, ſi nous prenons le rayon A B, pour Sinus total, les portions de l'Axe B P, B Q, B R, B G, *&c.* ſeront les Sinus verſes des Arcs B S, B T, B V, B F, *&c.* & par conſéquent nous pourrons appeller cette Courbe *une ligne Spirale ou Eliptique, dans laquelle les portions de l'Axe*

ſont les Sinus verſes des Arcs, qui ſont entre eux comme les ordonnées.

Maintenant ſi nous faiſons une autre hypotheſe, & ſi nous prenons le point A, pour le centre de la terre, la ligne B A, pour le demi-diametre, & l'Arc B V F, pour une portion de l'Equateur : Il eſt conſtant que dans la penſée de ceux, qui ainſi que nous avons dit ci-deſſus, croyent qu'un poids tombant librement de la ſurface de la terre parcoureroit les eſpaces de ſon Diamétre, en la même raiſon que ſont les Sinus verſes des Arcs de l'Equateur, qui paſſeroient cependant ſous le Méridien ; ce même poids (ſuppoſé que la terre ſe mût du mouvement journalier) arriveroit néceſſairement au centre, quand le quart de l'Equateur auroit paſſé depuis le moment de ſa chûte, je veux dire, au bout de ſix heures. C'eſt-à-dire, que le poids tombant du point B, arriveroit au point P, lors que le premier Arc de l'Equateur B S, auroit coulé, & qu'il parcoureroit la ligne B Q, en autant de temps qu'il faudroit à l'Arc B T, pour paſſer ſous le Méridien ; & la ligne B G en autant de temps qu'il en faudroit à l'Arc B F ; & enfin la ligne B A, c'eſt-à-dire, tout le demi-diametre, en autant de temps que l'Arc B Z, c'eſt-à-dire, le quart de Cercle de l'Equateur. Et comme le quart de Cercle de l'Equateur paſſe préciſément en ſix heures, il ſe voit qu'en cette opinion le poids tombant du point B, & paſſant par les portions du demi-diametre B A, dans les mêmes temps qu'il faudroit pour paſſer les Arcs de l'Equateur dont leſdites portions ſont les ſinus verſes ; ce même poids (ſuppoſé le mouvement journalier de la terre) arriveroit au bout de ſix heures préciſes au centre : d'où remontant en proportion contraire à ſa chûte, & par la même raiſon des Sinus verſes, il arriveroit au bout d'autres ſix heures à la ſurface de la terre oppoſée, de laquelle il retomberoit une autre fois en même eſpace de temps juſqu'au centre ; & enfin il retourneroit au bout de vingt quatre heures pré-

ciſes au point B, d'où il étoit premierement parti.

Suppoſé donc que ce ſoit là le génie & la nature des choſes peſantes ; ſi nous prenons la ligne B D pour l'eſpace qu'une fléche tirée horizontalement du point B doit parcourir dans le temps que l'Arc B F de l'Equateur ou ſon Parallele aura paſſé ſous le Méridien, il eſt conſtant que la fléche ſera cependant deſcenduë par ſon propre poids de toute la longueur de la ligne B G, qui eſt le Sinus verſe du même Arc B F. Et ſi nous diviſons le ſuſdit Arc B F en parties égales comme aux points S, T, V, & la ligne B D, ou ſon égale A C, en autant d'autres aux points I, L, N, ou H, K, M, ainſi qu'il s'eſt dit ; il ſe verra que le mouvement de Lation, qui a été communiqué à la fléche par l'impulſion, ſelon la ligne B D, étant uniforme, la fléche aura couru l'eſpace B I dans le même temps que l'Arc B S aura paſſé : & comme cependant elle ſera deſcenduë par ſon poids de la longueur de la ligne B P ou I O, la fléche ſe trouvera alors au point O, où les deux lignes, de Lation uniforme B I, ou P O, & de chûte B P ou I O, ſe rencontrent. Tout de même elle ſera en X quand l'Arc B T aura paſſé, parce que c'eſt en ce point où ſe trouvent la ligne de Lation égale B L ou Q X, & celle de la chûte B Q ou L X, qui ſe font l'une & l'autre dans le même temps du paſſage de l'Arc B T. Et la même choſe ſe pouvant dire de tous les points de la courbe B O X Y E ; il eſt évident que c'eſt celle que décriroit une fléche en l'hypoteſe ſuſdite ; & que par conſéquent cette ligne eſt la même que celle qui eſt décrite pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques : ce qu'il falloit démontrer.

Inſtrument pour décrire le trait de la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques. Fig II. de la I I. Planche.

Que ſi l'on déſire en décrire la figure tout d'un trait, & ſans être obligé de ſe ſervir de pluſieurs points trouvez, on peut faire un Inſtrument aſſez commode pour cet effet, qui doit être compoſé d'un Secteur de Cercle, d'une rouë avec ſon pignon, d'une regle endentée & d'une autre regle, (comme en la ſeconde Figure de la ſeconde Planche)

où le Secteur A B F eſt le même que celui de la premiere Figure de la ſeconde Planche que nous avons expliquée ; c'eſt-à-dire, que les lignes A B & A F de la ſeconde Figure ſont égales au module, & l'Arc B F à celui qui eſt compris entre les deux lignes B D & G E de la premiere Figure, qui font l'intervalle de la plus grande diminution de la Colonne. Cet Arc B F dans ladite ſeconde Figure doit être entrecoupé de dents, qui s'enchaſſant dans les dents du pignon C, le faſſent mouvoir, & donner le tour à la rouë L I K, qui dans la circonférence a d'autres dents égales & entrelacées avec celles de la regle G H, afin que par le mouvement circulaire de la rouë, la regle G H ſe puiſſe également avancer en ligne droite. Enfin il faut prendre une autre regle comme E S qui ſoit égale & parallele à la premiere G H, & tellement attachée à ſes extrémitez E & S, qu'elle ſe meuve en avançant avec elle, & conſervant ſon paralleliſme, en ſorte toutefois que rien ne l'empêche cependant de s'approcher vers le point A, & de ſuivre l'attraction continuelle qui eſt faite par une autre petite regle comme B D, qui étant attachée à un pivot ſur lequel elle puiſſe tourner au bout de l'Arc en B, embraſſe de ſon autre extrémité D ladite regle E S, & la contraigne de ſuivre la deſcente de l'Arc, ſans embaraſſer cependant le mouvement droit & en avant qui lui eſt communiqué par la regle G H.

Il paroît par cette conſtruction que ſi le diametre de la rouë L I K eſt au diametre du pignon C, comme la ligne I H, c'eſt-à-dire, les deux tiers de la Colonne, eſt à la longueur de l'Arc B P F; & ſi les dents du pignon ſont égales à celles du ſuſdit Arc, & celles de la rouë L I K à celles de la regle G H; il s'enſuivra que la regle endentée G H s'avancera uniformement depuis I juſqu'en H dans les mêmes intervalles de temps que l'Arc B F paſſera auſſi uniformement ſous le pignon C depuis F juſqu'en B; de telle ſorte que le bout de la regle H ſe trouvera préciſé-

ment en R, lors que le point B ſe trouvera en P, & qu'il y aura même proportion de toute la ligne I H à ſa partie I R, que de tout l'Arc B F à ſa partie B P, & ainſi des autres.

Il s'enſuivra de plus, que tandis que la ligne E S ſera portée uniformement en avant vers H par le mouvement de Lation égale de la régle G H, elle ſera encore portée d'un autre mouvement vers le point A, qui lui ſera communiqué par l'attraction continüelle de la régle B D, laquelle étant attachée au point B, fera que la ligne E S deſcendra ſelon la proportion des Sinus verſes des portions de l'Arc B F; c'eſt-à-dire, que lorſque la partie de l'Arc B F aura paſſé depuis le point F juſqu'en P, & que cependant la ligne E S aura coulé par le mouvement de la régle G H depuis I juſqu'en R; la même E S ſera auſſi deſcenduë de toute la diſtance R Q ou F N, qui eſt le Sinus verſe de l'Arc F P, en telle ſorte qu'elle ſe trouve alors au point Q. Et lorſque l'Arc entier B F aura paſſé depuis F juſqu'en B, & que cependant la ligne E S aura coulé juſqu'en H, elle ſera auſſi deſcenduë de toute la ligne H S ou F M, qui eſt le Sinus verſe dudit Arc F B, & en cette maniére elle ſe trouvera au point S, après avoir décrit, en ſon paſſage compoſé des mouvemens des deux régles G H & B D, la ligne Courbe I Q S, qui eſt celle que l'on cherche.

Cette deſcription eſt la même que celle de Vignole, qui fait ſes Colonnes Toſcanes & Doriques également groſſes depuis la baſe juſqu'au tiers de leur hauteur, où il commence leur diminution, & la continuë juſques ſous le chapiteau. Mais ſi on vouloit que la diminution commençant au ſuſdit tiers ſe fiſt auſſi uniformément de part & d'autre, & auſſi-bien vers la baſe que vers le chapiteau; il ne faudroit qu'ajoûter au Secteur A B F, une autre Secteur A B T égal à la moitié dudit Arc A B F; afin que paſſant ſous le pignon C de la part de K, & donnant un mouve-

ment contraire au haut de la rouë L I K, la régle I G fût pouſſée également vers le point X, où elle arriveroit lors que le ſuſdit Arc B T auroit paſſé ſous le pignon, & que cependant la régle E S, ou plûtôt O V, ſeroit deſcenduë depuis F juſqu'en N, c'eſt-à-dire, depuis X juſqu'en V, où elle ſe trouveroit, après avoir décrit en ſon paſſage la ligne Courbe I V, qui eſt la même que la ligne I Q S continuée de la part de V. Et ainſi l'on auroit toute la ligne V I Q S pour le Contour d'un côté de la Colonne, lequel pourra être transferé de l'autre part, ſi on veut avoir ſon entiere deſcription.

Et quoique cette maniere paroiſſe defectueuſe, en ce qu'elle ſemble ne pouvoir être propre que pour la délinéation de la diminution d'une Colonne, dont la longueur & groſſeur ſeroit déterminée, & qu'il faudroit autant d'inſtrumens differens, qu'il y peut avoir de differentes meſures de Colonnes, c'eſt-à-dire, infinies; il s'y peut néanmoins trouver un remede aſſez facile, & donner à cette Machine la même univerſalité pour les Colonnes Toſcanes & Doriques, que nous l'avons attribuée au diſcours ci-deſſus, à celle de Nicomédes pour les Ioniques, Corinthiennes & Compoſées.

Il ne faut que faire la régle endentée & le Secteur d'une grandeur indéfinie, & marquer ſes dents en forme de rayons partans du Centre, & remplir les eſpaces qu'ils font entr'eux en s'écartant, en ſorte qu'ils ſoient toûjours égaux aux intervalles des dents du pignon, afin que ſur la longueur du Rayon qui paſſe par le point B, on puiſſe hauſſer ou baiſſer le pivot, ſur lequel tourne la régle B D ſelon la meſure du module donné de quelque Colonne que l'on propoſe.

QUATRIE'ME DISCOURS.

APPLICATION DES SECTIONS Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

J'Aurois terminé ces raiſonnemens ſur leſquels il ſemble que je me ſuis ſuffiſamment étendu, ſi le diſcours précedent ne m'avoit fait faire une nouvelle réflexion ſur le méme ſujet, qui eſt que tout ainſi que ſur l'opinion de quelques-uns touchant la nature du mouvement d'un poids qui tombe, nous avons démontré que les corps jettez horizontalement décrivoient une ligne à peu-près pareille à celle dont on ſe ſert pour le trait de la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques; il me ſemble que ces mêmes corps jettez décrivant une autre eſpece de ligne dans l'opinion que quelques-autres ont euë du même mouvement, on peut préſumer que cette ligne pourroit être de quelque utilité pour la delinéation des mêmes Colonnes.

Et comme l'une & l'autre de ces deux opinions eſt fondée ſur des raiſons également probables, & marchent ſur des proportions ſi prochaines, qu'il eſt preſque impoſſible que l'eſprit humain les puiſſe diſcerner l'une de l'autre par l'expérience, ou les convaincre de faux dans les hauteurs qui ſont à notre connoiſſance; il y a auſſi grande apparence que les lignes des corps jettez, que nous pouvons appeller *lignes de Projection* tirant leur origine de principes ſi ſemblables & ſi proches, ne doivent pas auſſi être fort differentes, ou d'une nature ou figure extrémement éloignée l'une de l'autre.

Tant y a que les mêmes eſpaces qui dans l'opinion cideſſus expliquée, étoient parcourus par un poids qui tombe en certains intervalles de temps égaux, ſelon la ſuite des Sinus verſes des Arcs égaux de l'Equateur; les mêmes

intervalles, dis-je, ſont paſſez dans une autre opinion en mêmes temps ſelon la ſuite des nombres impairs, en ſorte que ſi dans le premier moment de ſa chûte il parcourt 1 de ces eſpaces, il en paſſera 3 dans le ſecond, 5 dans le troiſiéme, 7 dans le quatriéme, 9 dans le cinquiéme, 11 dans le ſixiéme, & ainſi à l'infini.

Et parce que dans le premier temps il a paſſé 1 eſpace & 3 eſpaces dans le ſecond temps, il aura parcouru 4 eſpaces dans le premier & ſecond temps enſemble, c'eſt-à-dire, en 2 temps; & 1, 3, & 5 eſpaces, c'eſt-à-dire, 9 dans le premier, ſecond & troiſiéme, c'eſt-à-dire, en 3 temps; & 1, 3, 5, & 7, c'eſt-à-dire, 16 eſpaces dans le premier, ſecond, troiſiéme & quatriéme, c'eſt-à-dire, en 4 temps, & ainſi des autres. Où il ſe voit que comme le nombre 4 des ſeconds eſpaces, eſt le Quarré de 2 qui eſt le nombre des ſeconds temps, & 9 qui eſt le nombre des troiſiémes eſpaces, eſt le Quarré de 3 nombre des troiſiémes temps, & 16 nombre des quatriémes eſpaces, eſt le Quarré de 4 nombre des quatriémes temps, & ainſi des autres; c'eſt-à-dire en un mot, que parce que les nombres impairs ajoûtez conſécutivement l'un à l'autre produiſent la ſuite des premiers quarrez; il s'enſuit par conſéquent que les nombres des eſpaces ſont entr'eux comme les Quarrez des nombres des temps, & que la raiſon de ceux-là eſt double de celle de ceux-ci.

La vrai-ſemblance de ces deux opinions ſe connoît auſſi par la proximité des nombres des eſpaces qui ſe parcourent en l'une & en l'autre dans les mêmes temps, qui eſt telle, que ſi au premier moment il ſe fait un eſpace, au ſecond il s'en fera 3 dans une opinion, & environ 3 moins $\frac{1}{12}$ dans l'autre, au troiſiéme il s'en paſſera 5 dans l'une, & 5 moins $\frac{1}{6}$ dans l'autre, au quatriéme 7 dans l'une, & 7 moins $\frac{1}{4}$ dans l'autre, au cinquiéme 9 dans l'une, & 9 moins $\frac{1}{3}$ dans l'autre; & ainſi conſécutivement à l'infini. Où il paroît que ces différences ſont ſi petites, & ſi peu remarquables

quables dans les hauteurs où nous pouvons faire les expériences, qu'il eſt abſolument impoſſible d'aſſûrer avec certitude de la verité ou fauſſeté de l'une ou l'autre de ces deux opinions.

Ce que Galilée a ſi bien reconnu, que bien qu'il ſoit l'Auteur de l'opinion qui ſoûtient que les eſpaces ſuivent la progreſſion des nombres impairs, & que ſur ce principe il ait compoſé un Livre entier du mouvement rempli d'un grand nombre de propoſitions ingénieuſes; il a néanmoins trouvé l'autre opinion ſi belle, qu'il n'a pû s'empêcher de la produire comme ſi elle venoit de lui dans le deuxiéme de ſes Dialogues du Siſtême du Monde, & d'en parler d'une maniere à faire croire que ce fût ſon veritable ſentiment. Il y explique même quelques proprietez de ce mouvement ſur ce principe, leſquelles ſont tout-à-fait admirables; & celle-ci entr'autres, que ſuppoſé le mouvement de la Terre, la ligne qu'un poids tombant de ſa ſurface au Centre décriroit par ſa chûte, ſeroit circulaire, & égale à celle qu'il deſigneroit, s'il ne partoit pas de ladite ſurface.

Galil. de motu.

Galil. 2. de Syſtem. coſm.

Sur quoi je dirai en paſſant, que pour faire en ſorte que cette propoſition ſoit veritable, il faut non ſeulement ſuppoſer que la Terre ſe meut, mais même qu'elle ne ſe meut que de ſon mouvement journalier, c'eſt-à-dire, ſur ſon propre centre; parce que ſi l'on y veut ajoûter l'annuel, ces lignes ceſſeront d'être circulaires, & deviendront plûtôt des eſpeces de Cycloïdes ou Roulettes, *ou même des Spirales*, auſſi-bien celle que décrit un poids qui tombe, que celle qui eſt faite par le point de la ſurface de la Terre, duquel il eſt parti pour tomber. Et c'eſt peut-être la raiſon qui fait dire ſur la fin de ſon diſcours ſur ce ſujet à Galilée, que n'oſant pas aſſûrer que ce ſoit là la nature des corps qui tombent, il peut au moins avancer cette propoſition, que ſi la ligne de leur chûte n'eſt pas cette cir-

culaire, c'en eſt une autre qui lui reſſemble, & qui ne s'en éloigne que de fort peu.

Mais pour retourner à notre propos, le même Galilée ayant démontré que ſur l'hypotheſe de la chûte des poids en proportion des nombres impairs, la ligne de Projection eſt parabolique, qui dans l'autre hypotheſe étoit Spirale; & comme la Parabole & la Spirale ont d'ailleurs un ſi grand nombre de proprietez communes, qu'elles ont fait dire à un grand Géometre de notre temps, que *la Parabole n'étoit qu'une Spirale développée*; il y a grande apparence que l'effet de l'une en la diminution des Colonnes pourroit auſſi être heureuſement produit par l'autre.

P. Greg. à S. Vincentio.

I.

Pour la Parabole.

C'Est ce qui m'a fait réſoudre à expliquer préſentement une maniere aſſez facile de décrire & d'appliquer la ligne Parabolique aux Colonnes, afin que l'on en puiſſe faire l'expérience, & la mettre deſormais en uſage, ſi elle ſatisfait aux yeux de ceux qui s'y connoiſſent.

Fig. III. de la II. Planche.

Pour l'appliquer, il y faut proceder en cette façon. La ligne A B ſoit la longueur de toute la Colonne, C D le demi-diamétre de ſa plus grande groſſeur, C G ou B F le demi-diamétre de ſa moindre groſſeur ſous le Collet ou Gorgerin, A C le tiers de la Colonne, ou telle autre partie où on voudra que la diminution commence. Après quoi la ligne C D doit être continuée en N, en ſorte que D N ſoit égale à D G ou E F; & ſur la ligne C N, comme diamétre on décrit le demi-cercle N O C, qui coupe la ligne D E en O, & l'on fait D H égale à D O, laquelle ſera par conſéquent moyenne proportionnelle entre C D & D G; puis il faut mener H I parallele à A B, qui ſoit coupée en I par la ligne D I, tirée du point D par le point

F, & l'on fait les lignes C K & C M égales à H I. Enfin du point D comme ſommet, ſur l'axe D C & ſur l'amplitude M K, on décrit la ligne Parabolique M L D F K, laquelle paſſera néceſſairement par le point F, & laiſſera de part & d'autre la ligne, L D F pour la diminution que l'on demande.

La démonſtration en eſt aiſée, parce que la ligne H D étant moyenne proportionnelle entre les deux C D & D G, il s'enſuit que le quarré de H D ſera au quarré de D G, comme la ligne C D eſt à la ligne D G; mais le quarré de D H eſt au quarré de G D, comme le quarré de H I ou C K eſt au quarré de G F; donc le quarré de l'ordonnée C K ſera au quarré de l'ordonnée G F, comme la portion de l'axe C D eſt à la portion G D. Et partant le point F ſera dans la Parabole dont l'axe ſera C D, le ſommet D, & l'ordonnée C K, c'eſt-à-dire, l'amplitude M K.

Je ne groſſirai point ce diſcours de toutes les differentes manieres dont on ſe ſert pour décrire les Paraboles, ſoit par le moyen de pluſieurs points trouvez, ou tout d'un trait, par des inſtrumens qui ſe trouvent aiſément dans les Livres. J'avertirai ſeulement les Ouvriers que Galilée leur en enſeigne une dans ſes Méchaniques, que j'eſtime facile & ingénieuſe, & que j'ai fait heureuſement pratiquer par les Charpentiers du Roy, en la fabrique des Vaiſſeaux & Galeres, pour ce qu'ils appellent leur donner beau Galbe à la Pouppe.

Elle eſt telle, qu'il ne faut que faire la deſcription ci-deſſus, au plan d'un mur qui ſoit à plomb, en ſorte que la ligne M K ſoit de niveau, & attacher deux clous aux deux repaires K & M qui terminent l'amplitude de la Parabole, ſur leſquels il faut laiſſer librement pendre une fiſcelle ou chaînette, juſqu'à ce que de ſon milieu elle vienne à toucher le point D, c'eſt-à-dire, le ſommet de la Parabole, afin qu'elle la marque dans toute ſon étenduë; en ſorte que ſi cette cordelette eſt frotée de crayon ou ſanguine,

& qu'on la faſſe toucher doucement au mur ſans la changer de ſituation ni la varier, la ligne Parabolique ſe trouve déſignée ſur le plan du mur, laquelle paſſera néceſſairement par le point F.

II.

Pour l'Ellipſe.

Figure III. de la I. Planche.

QUE ſi l'on veut éprouver quel effet peut faire la ligne Elliptique, il faut (dans la 3. Figure de la 1. Planche) décrire un demi-cercle ſur tout le diamétre de la plus grande groſſeur de la Colonne K D, lequel coupe G F en H, & abaiſſer la ligne H I parallele à D K; puis tirer la ligne I D, à laquelle du point B il faut mener une parallele B O qui rencontre la ligne K D continuée en O, & faire les quatre lignes C N & C M, D P & D Q égales à la ligne C O; & par ce moyen l'on aura les deux axes de l'Ellipſe M N & K D, laquelle paſſera néceſſairement par le point F; & les deux points Q & P en ſeront les foyers, qui ſont appellez Singliots par les Ouvriers, & par le moyen deſquels l'Ellipſe ou ovale peut être facilement décrite.

La démonſtration en eſt telle, parce que B O eſt parallele à I D; la ligne C O ſera à C B, c'eſt-à-dire, C N à G F, comme C D eſt à C I ou G H; & le quarré de l'ordonnée C N au quarré de l'ordonnée G F, comme le quarré de C D eſt au quarré de G H, c'eſt-à-dire, comme le rectangle K C D eſt au rectangle K G D; & partant le point F ſera dans l'Ellipſe dont M N & D K ſeront les Axes. Le reſte au ſujet des foyers Q & P, ſe voit clairement par la 52. du 3. des Coniques d'Apollonius.

III.

Pour le Cercle.

PEut-être que la ligne circulaire même tombera dans le goût de quelques-uns. Elle se peut appliquer en cette maniere. Il faut (dans la 4. Figure de la 2. Planche) méner la ligne droite D F, sur laquelle au point H, où elle est partagée en deux également, il faut tirer une perpendiculaire H I, laquelle rencontre la ligne D C continuée en I, où sera le centre du cercle, qui ayant I D pour rayon, passera aussi par le point F. *Figure IV. de la II. Planche.*

Mais comme ce centre I peut se trouver tellement éloigné, que la pratique de la description du Cercle en deviendroit difficile, ou même impossible; l'on peut se servir de deux régles, comme D O & D N de grandeur indéterminée, & attachées en D, en sorte qu'elles contiennent l'angle F D M; & mettant deux repaires fermes aux deux points F & M, que je suppose également distans du point G; il faut faire marcher le sommet de l'angle D depuis L jusqu'en F, en sorte que la régle D N touche toûjours le point M, & la régle D O le point F; & par ce moyen le point D décrira par son passage la ligne circulaire L D F que l'on demande.

IV.

Pour l'Hyperbole.

ET si l'on veut sçavoir si l'Hyperbole y est utile, il faut (dans la 4. Figure de la 1. Planche) continuer indéfiniment la ligne C D, & prendre les deux D I & I K égales à D C, en sorte que D K soit égale au plus grand diamétre de la Colonne; puis sur les deux lignes D K & G I comme diamétres, il faut décrire deux demi-cercles s'entrecoupans au point H, & du point G tirer la ligne G H, & la continuer en R, en sorte que G R soit égale à *Figure IV. de la I. Planche.*

G F ; puis du point R, il faut mener R L paralléle à H I, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à G R, & qui rencontre la ligne G K continuée en L. Enſuite on prend la ligne D M égale à R L, & ayant tiré la ligne I M, on fait de part & d'autre du point I ſur la ligne C K continuée, les lignes I O & I P égalés à I M. Et par ce moyen ſont trouvez les foyers ou Singliots O & P de l'Hyperbole, dont l'Axe tranſverſe eſt D K, ſon Axe conjugué T S double de la ligne D M, le centre I, le ſommet D, où elle touchera la ligne D E, & paſſera par le point F.

Voici comme je le démontre, parce que l'angle I H G eſt droit dans le demi-cercle I H G ; & la ligne H I demi-diamétre du Cercle D H K ; la ligne G H touchera le ſuſdit Cercle au point H, & partant le rectangle K G D ſera égal au quarré G H, & le rectangle K G D ſera au quarré de l'ordonnée G F, comme le quarré G H au même quarré G F, ou de ſon égale G R, c'eſt-à-dire, comme le quarré H I, ou de ſon égale D I, au quarré R L, ou de ſon égale I S ; c'eſt-à-dire, en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diametre K D au quarré du diametre T S. Et partant le point F ſera dans l'Hyperbole, dont les deux Axes ſeront D K & T S, le centre I, & le ſommet D. Maintenant parce que D M eſt égale à I S, le quarré I M ou I O ſera égal aux quarrez I D, & I S ; mais le quarré I O eſt auſſi égal au quarré I D, & au rectangle K O D ; donc le rectangle K O D eſt égal au quarré I S, c'eſt-à-dire, au quart de la Figure, & excédent d'un quarré, dont le côté eſt la ligne D O ; & par conſéquent le point O & le point P qui eſt également diſtant du centre I, ſeront les foyers de l'Hyperbole ſuſdite : ce qu'il falloit démontrer.

Inſtrument pour la déliniation de l'Hyperbole.

Il y a mille moyens de décrire les Hyperboles, quand on a trouvé ſes Axes & ſes foyers ; & le plus aiſé pour les Ouvriers eſt celui de M. Deſcartes qui ſe pratique ainſi : On prend une grande regle, comme P Q, que l'on atta-

che par un bout au Singliot P, ſur lequel elle tourne, & par l'autre bout Q à une ſiſcelle Q F O, qui doit être plus courte que la regle de toute la longueur de la ligne D K; l'autre extrémité de la corde s'attache à l'autre Singliot O.

Cela fait, il faut tenir la ſiſcelle tout près de la regle, comme ſi elle y étoit collée, ainſi qu'il ſe voit dans la Figure, depuis Q juſqu'en F, ou depuis V juſqu'en X; & en tournant la regle ſur le Pivot P, & tenant toujours la corde joignant la regle, le point où elles ſe joindront décrira par ce mouvement l'Hyperbole F X D que l'on demande, laquelle pourra être continuée de l'autre côté, en changeant la regle de face.

CINQUIEME DISCOURS.

DETERMINATION DES MANIERES infinies d'appliquer les Sections Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

IL faut ici remarquer que bien que je n'aye parlé cy-deſſus que d'une ſeule maniere d'Ellipſe & d'Hyperbole, ſçavoir de celle où l'Axe tranſverſe de l'une & de l'autre eſt égal au plus grand diametre de la Colonne; il y a pourtant un nombre infini d'autres eſpeces de l'une & de l'autre qui peuvent être décrites, & ſervir utilement à la diminution des Colonnes, & de ſorte qu'elles touchent la ligne D E en D, & paſſent par le point F. Ce que j'explique en cette maniere.

Aux deux lignes D G & G F (dans la 1. Figure de la 3. Planche) ſoit faite une troiſiéme proportionnelle G H; *Fig. I. de la III. Planche.* & du point H ſoient menées des lignes de tous côtez, comme H D, H L, H I, H M, &c. leſquelles coupent la ligne D E continuée en D, Q, P, I, O, &c. en ſorte qu'elles rencontrent diverſement la ligne D G continuée indéfiniment: C'eſt à ſçavoir que H D la coupe au point

D, H L au-deſſus du ſuſdit point D, H ϑ lui ſoit parallele, H M la coupe en M au-deſſous du point G, & H N en N, en ſorte que G N ſoit égale à G D, & enfin H λ au point λ, en ſorte que G λ ſoit moindre G D; enſuite de tous les points de la ligne G D, compris entre G & D, ſoient entenduës être menées des lignes paralleles à G H, & qui ſoient moyennes proportionnelles entre les portions de la ſuſdite ligne G D, compriſes reſpectivement entre le ſommet D & leſdites paralleles, & les portions deſdites paralleles contenuës entre ladite D G & les lignes tirées du point H. Ces choſes ainſi ſuppoſées.

Je dis que toutes ces moyennes proportionnelles ſeront les ordonnées des lignes reguliéres, dont l'Axe ſera G D, le ſommet D, où la pluſpart touchera la ligne D E, & paſſeront par le point F, ſuivant cet ordre.

I.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de l'Axe D G, & les portions des paralleles coupées par la ligne H D, comme A Z moyenne entre A D & A S, ſeront *les ordonnées à une ligne droite D Z F.*

II.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H L comme A T moyenne entre A D, & A B, *ſeront dans l'Hyperbole D T F*, dont D L ſera l'Axe tranſverſe, & D Q le droit. Où il paroît que ce ſera l'Hyperbole que nous avons décrit cy-deſſus, ſi la ligne D L eſt égale au plus grand diametre de la Colonne, & G F égale aux deux tiers de ſa longueur.

III.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H ϑ, comme

A V.

A V moyenne entre A D & A C, *ſeront les ordonnées à la Parabole D V F*, qui eſt celle que nous avons expliquée cy-deſſus, & dont G D ſera l'Axe, & G H ou D P le diametre droit ou contigu.

IV.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H M, comme A X moyenne entre A D & A K, *ſeront les ordonnées à une Ellipſe D X F*, dont l'Axe tranſverſe eſt D M, & ſon droit ou contigu eſt D I. Où il ſe voit qu'elles ſeront au cercle que nous avons décrit au précédent diſcours, ſi les lignes G H & M G ſont égales, & qu'elles ſeront dans l'Ellipſe que nous avons expliquée au même endroit, ſi la ligne D M eſt égale au plus grand diametre de la Colonne.

V.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D & les paralleles coupées par la ligne H N, comme A Y moyenne entre A D & A R *ſont auſſi dans une Ellipſe D Y F*, dont l'Axe tranſverſe eſt D N, & le droit D O. Où il faut remarquer que G N ayant été faite égale à G D dans cette hypotheſe, la ligne G F ſera la moitié de l'Axe de même conjugaiſon avec D N, & partant cette Ellipſe eſt la derniere de celles qui peuvent ſervir aux Colonnes parce que toutes les autres, dont les Axes tranſverſes ſont moindres que D N, ont quelques ordonnées au ſuſdit Axe & au-deſſus du point G qui ſont plus longues que G F, & qui font par conſéquent paſſer la courbe de l'Ellipſe au-delà de la ligne E F, comme il ſe voit en l'hypotheſe qui ſuit.

VI.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H A, comme A,

moyenne entre A D & A μ, *ſont ordonnées à une Ellipſe* D ρ F, dont l'Axe tranſverſe eſt D λ, & le droit D ν; où il ſe voit que ſi le point A eſt plus près du point milieu de la ligne D λ que le point G, la ligne A ρ ſera plus longue que G F; & par conſéquent le point ρ de l'Ellipſe paſſera au-delà de la ligne E F en ρ, d'où elle retournera en F, après avoir fait une Courbure en dehors: ce qui ne peut pas ſervir aux Colonnes.

VII.

Enfin, ſi la ligne du point H coupe D G entre D & G comme en π; il arrivera 1. Que toutes les moyennes proportionnelles entre les parties de π D & les paralleles tirées entre les points π & D, & coupées par la ligne H π continuée en τ, comme A β moyenne entre A D & A ξ, *ſeront ordonnées à un cercle* D β π ſi les lignes π D, τ D ſont égales, *ou à une Ellipſe*, ſi elles ſont inégales, dont l'Axe tranſverſe π D & le droit τ D.

2. Et toutes les moyennes entre les parties de G D & les paralleles tirées de tous les points de la ligne G π, & coupées par la ligne H π, comme ψ χ moyenne entre ψ D & ψ φ, *ſeront ordonnées à une Hyperbole* π χ F, qui touchera la ſuſdite Ellipſe au point π, & aura mêmes Axes qu'elle, ſçavoir π D pour tranſverſe, & D τ pour droit.

En quoi il ſe voit encore que ni l'une ni l'autre de ces deux lignes ne peuvent avoir aucune utilité pour les Colonnes, parce que l'Ellipſe ne paſſe point par F, & l'hyperbole ne touche point la ligne D E en D, qui ſont conditions néceſſaires pour leſdites Colonnes.

Maintenant, comme on peut tirer une infinité de lignes du point H entre les deux lignes H G & H δ qui couperont la ligne G D en quelque point au-deſſus de D, lequel terminera l'Axe tranſverſe *d'une Hyperbole utile aux Colonnes*; & comme on peut tirer une autre infinité de lignes du même point H, qui couperont la même G D au-deſſous du

point N en quelque point qui terminera l'Axe tranſverſe *d'une Ellipſe auſſi utile aux Colonnes.*

De plus, comme les unes & les autres deſdites lignes ſont régulieres, uniformes, & qui ſe peuvent décrire par une infinité de manieres differentes, auſſi-bien que par celles que nous avons cy-deſſus expliquées, & qui (a la reſerve de celles dont les Axes tranſverſes ſont coupez par les lignes tirées du point H entre les points D & N) touchent toutes la ligne D E en D, & paſſent par le point F.

Il s'enſuit que l'on peut utilement décrire une infinité de ces lignes pour le trait de la diminution des Colonnes, entre leſquelles la Parabole ſera la moyenne, ſous laquelle paſſeront les Hyperboles dans l'eſpace contenu entre la Parabole & la ligne droite D F, & toutes les ellipſes paſſeront au-deſſus, c'eſt-à-dire, dans l'eſpace compris entre la Parabole & la droite D E.

Et quoi qu'entre ces lignes j'aye ſeulement choiſi pour exemple celles dont l'Axe tranſverſe étoit égal au plus grand diametre de la Colonne, ce n'a pas été pour être plus aiſées ou plus utiles que les autres, mais ſeulement parce que cette grandeur s'eſt trouvée ainſi déterminée.

De toutes ces choſes, on peut juger ſi je n'ai pas eu raiſon de ſouhaiter au premier Diſcours de ce Problême, que l'Auteur *du Paradoxe propoſé à réſoudre à tous les Architectes*, ſe fut un peu plus clairement fait entendre de la nature de la ligne, que l'on peut, comme il dit, décrire *Architectoniquement parfaitement* pour le renflement & diminution des Colonnes; puis qu'après que quelqu'un en aura décrit *Architectoniquement parfaitement* une infinité par les manieres cy-deſſus dites, il dépendra toujours de la volonté de l'Auteur *du Paradoxe* de s'en réſerver une infinité d'autres, & dire qu'on n'aura pas encore trouvé la ſienne.

Outre que cette même infinité de lignes qui ſe trouve dans ces trois ſections de Cone, que M. Deſcartes appelle

lignes du premier Genre, dont les Equations ne montent qu'aux quarrez, ſe rencontrent de même dans toutes les lignes des Genres plus élevez, leſquels étant d'ailleurs infinis, produiſent encore une infinité d'infinité de lignes régulieres; uniformes, que l'on peut décrire *Architectoniquement parfaitement*, & qui ſont propres à réſoudre *le Paradoxe* propoſé.

Sans parler d'une autre infinité de lignes, qui ne ſont pas compriſes ſous ces Genres, comme de la Roulette, Ovales de M. Deſcartes, Spirales, Cyſſoïdes, Conchoïdes, Quadratices, &c. leſquelles ſont auſſi lignes uniformes & régulieres, & qui par conſéquent peuvent faire effet dans cette deſcription.

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'Appollonius François des Tactions, ou décrire Géometriquement les Arcs rampans ſur toutes ſortes de pieds droits & de hauteur.

PREMIER DISCOURS.

IL y a deux choſes qui méritent d'être conſiderées au ſujet des Arcs rampans, qui ſont ordinairement mis en pratique ſur des ouvertures & hauteurs données ou non données; l'une regarde la maniere de les décrire, & qui fait le ſujet du préſent Problême; l'autre traite du moyen de tirer leurs joints de tête, qui eſt expliqué dans le Problême ſuivant.

Premiere Obſervation.

Sur la maniere de décrire les Arcs rampans, je me ſuis ſouvent étonné que la pratique que Pappus enſeigne dans le 8. de ſes Collect. Mathem. de trouver les Axes d'une Ellipſe, dont les diamétres de même conjugaiſon ſont donnez, ne fut pas en uſage parmi les Ouvriers pour la deſcription de ces Arcs, vû qu'elle y eſt ſi utile & ſi aiſée.

Et après avoir médité ſur les cauſes qui peuvent l'avoir juſqu'ici fait négliger, j'en ai trouvé deux aſſez apparentes. La premiere eſt, qu'il ne paroît pas facilement qu'il y ait aucun rapport entre la propoſition de Pappus, & la deſcription de ces Arcs rampans, parce qu'il faut une préparation aſſez difficile ſur les lignes données, que l'Ellipſe ou l'Arc propoſé doit toucher en certains points, afin de trouver ſes diamétres de même conjugaiſon, au-

paravant que l'on y puiſſe appliquer ce Problême de Pappus. L'autre raiſon eſt, que ce Problême dans l'Auteur n'eſt expliqué que méchaniquement, quoique ſa réſolution ſoit purement Géométrique, & n'ayant été démontré ni par Pappus, ni même par Commandin qui l'a commenté, on a dû juſqu'ici douter de ſa verité; & l'apprehenſion que l'on a euë de travailler ſur une fauſſe ſuppoſition, a pû être en partie la cauſe qu'on ne s'y ſoit pas étudié.

Pour ſatisfaire à l'une & à l'autre de ces raiſons, j'ai travaillé à donner une deſcription aiſée de ce qu'il faut faire pour cette préparation, c'eſt-à-dire, pour trouver les diamétres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, ou autre ſection qui doive toucher certaines lignes données en certains points dans tous les cas qui ſe peuvent propoſer; (ce qui peut en Géométrie porter le nom d'Apollonius des Tactions.) Et après y avoir joint des Pratiques entieres & démontrées, j'ai auſſi voulu faire connoître, que l'on pouvoit ſe ſervir aſſûrément de la régle de Pappus, de laquelle j'ai fait une Démonſtration purement Géométrique, afin que les Ouvriers la puiſſent dorénavant mettre en uſage au lieu de celles qu'ils employent, qui ſont ou fautives & défectueuſes, ou trop embarraſſées.

Seconde Obſervation.

On peut donc conſtruire les Arcs rampans par des Ovales qui ſont faites par l'attouchement de certaines portions de Cercles, ou par le moyen des Sections Coniques, ou même par une infinité d'autres lignes de divers genres. Je ne dirai rien de la premiere maniere, parce qu'elle a été curieuſement recherchée & heureuſement décrite par le ſieur Boſſe dans ſes derniers Ouvrages d'Architecture. La troiſiéme façon de les décrire par des lignes d'un autre genre que les Sections Coniques eſt ſi vaſte, ou

pour mieux dire ſi embarraſſée, qu'elle ne peut pas avoir grand uſage dans la pratique.

Ce ſera donc la ſeconde qui ſe ſert des Sections Coniques que j'expliquerai dans ce Diſcours, & particulierement ce qui regarde les conſtructions de l'Ellipſe comme de la Section, dont l'uſage eſt plus fréquent que des autres en cette matiere.

Mais avant que de paſſer plus outre, il n'eſt pas hors de propos d'enſeigner une choſe, qui tombe très-ſouvent en uſage quand on traite des Sections Coniques, & dont la connoiſſance abregera de beaucoup les pratiques que nous déduirons ci-après. C'eſt ce Problême.

Trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données.

Les deux lignes ſoient A B & C (dans la 2. Figure de la 3. Planche,) & de la plus grande A B ſoit retranchée la partie B D égale à C, & le reſte A D diviſé en deux également en E. Enſuite ſur les deux lignes A D & E B comme diamétres, il faut faire les deux demi-cercles A G D, E G B ſe coupans en G, d'où il faut mener les droites G B, G E, & abaiſſer G F perpendiculaire à A B. Je dis que la ligne B F ſera celle que l'on cherche, & moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux droites données A B & C; parce que l'angle E G B au demi-cercle étant droit, auſſi-bien que les angles au point F, la ligne B E ſera à E G, comme E G eſt à E F; c'eſt-à-dire, que E G ou E D ſera moyenne Géométrique entre les deux E B & E F; & partant par converſion de raiſon, doublant les antécédens, & diviſant, la ligne A F ſera à la ligne F D comme A B eſt à B D; c'eſt-à-dire, que comme la premiere A B eſt à la troiſiéme B D, ainſi A F, qui eſt l'excès de la premiere A B ſur la ſeconde B F, eſt à F D, qui eſt l'excès de la ſeconde B F ſur la troiſiéme B D. Et par conſéquent les trois lignes A B, F B, D B ſont en continuelle proportion Har-

Figure II. de la III. Planche.

monique, & la ligne B F eſt moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A B & B D ou C. Ce qu'il falloit faire.

Il paroît de plus que le quarré de la Touchante B G étant égal au rectangle des mêmes extrêmes A B & B D, la même B G ſera moyenne Géométrique entre ces lignes. Et parce que la ligne A B ſurpaſſe E B du même excès que la ligne E B ſurpaſſe D B, il s'enſuit que cette ligne E B eſt la moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes A B & B D ou C. Voilà donc entre deux extrêmes données A B & C, trois moyennes trouvées, ſçavoir l'Arithmétique B E, la Géométrique B G, & l'Harmonique B F.

Or comme dans le Triangle E B G, la ligne E B eſt à B G, comme B G eſt à B F; il s'enſuit que la même B G eſt auſſi moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux E B & B F. Et partant que *la moyenne Géométrique entre deux lignes extrêmes, eſt auſſi moyenne Géométrique entre les deux moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes.* Ce qu'il faut remarquer.

Troiſiéme Obſervation.

Sur ce propos il y a deux choſes que je ne ſçaurois diſſimuler. La premiere eſt l'étonnement que j'ai eu, qu'encore que l'on ait écrit de ſi belles choſes des Sections Coniques, & qu'entre les propriétez de leurs Contingentes, celle-ci ait été reconnuë pour une des principales & plus fréquentes, puiſqu'il arrive en mille façons qu'une ligne s'y trouve diviſée comme A B l'eſt en F & en D; de ſorte que la Toute A B ſoit à ſa Partie D B comme A F eſt à F D. Et quoique les plus grands Géométres ayent particuliérement recherché les admirables effets de cette eſpéce de proportion, je n'ai pourtant vû juſqu'ici perſonne qui ſe ſoit aviſé de l'appeller *Harmonique*. Il y en a quelques-uns qui l'ont appellée *Involution*; d'autres ont dit que c'étoit *une moyenne & extrême raiſon proportionnelle*; mais pas un,

M. Deſargues P. Greg. à S. Vincent.

jau

au moins que je ſçache, ni des Anciens ni des Modernes, ne lui ont donné ſon veritable nom.

Quatriéme Obſervation.

Sur les Erreurs de Pappus pour l'inſcription de trois médiétez au demi-cercle.

La ſeconde des choſes que je ne ſçaurois diſſimuler au ſujet des proportionnalitez, c'eſt que Pappus ayant propoſé la queſtion que j'ai expliquée ci-deſſus ſous le nom du ſecond Problême dans le 3. Livre de ſes Collections Mathématiques de *trouver*, ainſi qu'il dit, *trois médiétez dans un demi-cercle*, il ſemble qu'il n'ait pas trop bien entendu lui-même la nature de la propoſition, en laquelle il a fait, à mon ſens, deux fautes conſiderables. La premiere eſt, d'avoir repris aſſez légérement la ſolution qu'un autre en avoit faite avant lui, quoiqu'elle fût légitime. La ſeconde eſt, de l'avoir lui-même mal réſoluë.

L'une & l'autre ſe reconnoîtra par ſon diſcours & dans ſes Figures. La queſtion commence par ce titre. *Le ſecond Problème étoit tel.*

Prendre trois médiétez dans le demi-cercle.

Un autre, dit-il, *l'a expliqué en cette maniére, & expoſant un demi-cercle A B C* (dans la 3. Figure de la 3. Planche) *dont le centre eſt E, & prenant dans la droite A C quelque point comme D, & élevant la Perpendiculaire D B, il a mené la ligne E B, ſur laquelle ayant tiré du point D la perpendiculaire D F, il s'eſt contenté d'affirmer ſimplement qu'il avoit expoſé trois médiétez dans le demi-cercle, ſçavoir E C, moyenne Arithmétique, D B, Géometrique, & B F, Harmonique. Or il eſt conſtant que B D eſt la moyenne en proportion Géometrique entre les deux A D & D C; & que E C eſt moyenne Arithmétique entre les deux mêmes extrêmes A D & D C: parce que A D eſt à D B comme D B eſt à D C; & comme* Figure III. de la III. Planche.

A D eſt à elle-même, ainſi l'excès des deux A D, A E, c'eſt-à-dire, A D, E C eſt à l'excès des deux E C & C D. Mais il n'a point dit en quelle ſorte B F fût moyenne en médiété Harmonique, ni de quelles lignes droites, c'eſt-à-dire, entre quelles extrêmes; mais il a ſeulement aſſûré qu'elle étoit la troiſiéme proportionnelle aux deux E B & B D, ne ſçachant pas que des trois lignes E B, B D, B F, qui ſont en proportion Géometrique, il ſe forme une médiété Harmonique: car nous montrerons ci-deſſous que deux E B, trois D B & B F ajoûtées enſemble, ſont le plus grand terme d'une médiété Harmonique, de laquelle deux B D & B F ſont le moyen, & B D & B F le moindre.

Voilà tout le diſcours de Pappus que j'ai traduit du Latin de Commandin, dans lequel il paroît que Pappus n'a pas connu que la ligne B F fût la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes A D & D C, entre leſquelles les deux E C ou E B & D B ſont auſſi reſpectivement moyennes Arithmétique & Géometrique; parce qu'il ne s'eſt pas ſouvenu de ce que nous avons fait remarquer ci-deſſus, que *la moyenne Géometrique entre deux extrêmes étoit auſſi moyenne Géometrique entre les moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes*; n'étant pas poſſible qu'il n'eût vû, ſi la penſée lui en étoit venuë, que la ligne B D étant moyenne Géometrique entre les deux extrêmes A D & D C, & entre les deux lignes E B & B F, dont E B eſt moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes A D & D C, la ligne B F ne dût être auſſi la moyenne Harmonique entre les mêmes.

Figure IV. de la III. Planche.

Ce qui ſe pourroit encore démontrer d'une autre maniere, en prenant (dans la 4. Figure de la 3. Planche) la ligne E G égale à D C, & ménant la ligne D K qui touche le Cercle A K H fait du centre G & intervalle A G, & la ligne K I, perpendiculaires à A C & G K, parce que la toute A E étant égale à la toute E C, & l'ôtée G E égale à l'ôtée D C, le reſte A G ou G H ſera égal au reſte E D;

& ôtant le commun E H, la ligne E G ou C D ſera égale à D H; & comme A D à D C, ainſi A D à D H; mais la raiſon de A D à D C eſt double de celle de A D à D B, & la raiſon de A D à D H double de celle de A D à D K: Donc la raiſon de A D à D B ſera égale à celle de A D à D K; & partant la ligne D K ſera égale à D B. Maintenant ſi aux lignes égales G H & E D on ajoûte les égales H D & D C, les toutes G D & E C ou E B ſeront égales; & partant G D ſera à D K comme E B à B D; mais comme G D eſt à D K, ainſi D K eſt à D I; comme E B eſt à B D, ainſi B D eſt à B F: Donc D K ſera à D I, comme D B eſt à B F; & partant la ligne D I ſera égale à la ligne B F. De plus, la ligne D K touchant le cercle, & K I étant perpendiculaire à A D, il s'enſuit que A D premiere eſt à D H troiſiéme, comme A I différence de la premiere A D & ſeconde D I eſt à I H différence de la ſeconde I D & troiſiéme H D, c'eſt-à-dire, que la ligne D I eſt moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A D & D H ou D C. Et partant que la ligne B F égale à D I eſt auſſi moyenne proportionnelle entre les deux A D & D C, dont D B eſt la moyenne Géometrique, & E B ou E C l'Arithmétique.

Il paroît donc que le Problême de Pappus a été parfaitement reſolu par les trois lignes E C, B D, B F, qui ſont moyennes Arithmétique, Géometrique & Harmonique en un demi-cercle A B C, & entre mêmes extrêmes A D & D C.

Et pour ce qu'il dit enſuite, que des trois lignes en proportion Géometrique E B, B D, B F ajoûtées l'une à l'autre en certaine maniére, il s'en forme une médiété Harmonique: Quoique cela ſoit vrai, & d'une analogie, (comme il dit) ingénieuſe, ainſi que nous l'avons expliqué dans un autre diſcours; cela n'a point de rapport à la queſtion préſente, parce que cette médieté produite donne d'autres termes & d'autres proportions que celles qui ſont propoſées.

L'autre défaut ſe reconnoîtra dans la 16. Prop. du même Livre, où il propoſe lui-même à réſoudre le Problême ci-deſſus, qu'il prétend avoir été mal réſolu par d'autres. Il dit donc ainſi.

Faire trois médiètez dans le demi-cercle.

Figure V. de la III. Planche.

Tout ce que nous avons dit ci-deſſus (dit-il) *de trois médiétez, eſt ſelon l'opinion des Anciens; mais nous montrerons maintenant qu'il eſt poſſible de faire auſſi en ſix lignes droites & les plus petites, trois médietez dans le demi-cercle.*

Que l'on expoſe (dans la 5. Figure de la 3. Planche) *un demi-cercle, dans lequel B D ſoit perpendiculaire, E B demi-diamétre, ſur qui D F ſoit auſſi à angles droits; & par B ſoit menée G B H qui touche le cercle; & après avoir continué A C en G, ſoit faite B G égale à B H, & tiré la ligne D K H. Je dis que E K eſt moyenne en médieté Harmonique, dont B E eſt la plus grande, & E F la moindre, parce que les angles aux points B & F étant droits, &c..... Or nous avons démontré que les droites A D, E C, D C faiſoient une médieté Arithmétique, & que les droites E G, E C, E D, faiſoient une autre médieté Géometrique. Nous avons donc fait trois mèdietez dans le demi-cercle.*

Dans tout ce diſcours de Pappus je ne vois pas bien ce qu'il entend par ces mots, de *faire au demi-cercle trois médietez en ſix lignes les plus petites*; car quoique les trois lignes B E, E K, E F faſſent une médieté Harmonique, que les trois A D, E C, D C une Arithmétique, & les trois E G, E C, E D une Géometrique; elles ſont néanmoins plus de ſix lignes différentes, & elles ne ſont pas toutes dans le demi-cercle, hors duquel s'étend la ligne E G. De plus, il ne peut pas entendre par ces ſix lignes trois couples d'extrêmes comme A D, D C: B E, E F: & E G, E D: entre leſquelles il faille trouver trois moyennes dans le demi-cercle, tant parce que pas une de ces extrêmes n'eſt déterminée, & qu'elles ne ſe trouvent non

plus que les moyennes que par la conſtruction, que parce que, comme nous venons de dire, il y a une de ces extrêmes, ſçavoir E G, qui tombe hors du demi-cercle.

Le Problême ſeroit élegant, ſi ayant propoſé trois couples de lignes diſpoſées en certaine maniere, comme A D, D C : E G, E D : A G, & une autre, comme A L : il falloit trouver le demi-diamétre d'un cercle comme E C, qui fût reſpectivement moyenne Arithmétique, Géometrique, & Harmonique aux trois couples propoſez en la même ſorte qu'elle l'eſt Arithmétique & Géometrique aux deux couples A D, D C : & E G, E D : Mais comme elle n'eſt plus moyenne, mais plus grand terme au troiſiéme couple propoſé E B, E F : la propoſition eſt défectueuſe.

Ou bien à la maniere que les Anciens l'ont entendu & réſolu, comme il dit, en cinq lignes ſeulement, ſçavoir qu'il fallût trouver dans le demi-cercle les trois moyennes entre deux extrêmes ; comme entre les deux A D, D C, trouver A E moyenne Arithmétique, B D Géométrique, & B F Harmonique, ou entre les deux B E, E F, après avoir diviſé B F en deux également en I, trouver E I moyenne Arithmétique, E D Géometrique, & E K Harmonique ; ou enfin entre les deux A G, G C trouver E G, Arithmétique, B G, Géometrique, & D G, Harmonique. Et ainſi une infinité d'autres.

Et Pappus auroit en cette maniere évité l'obſcurité qui ſe trouve dans ſon Problême, qui fait douter qu'il l'ait bien entendu lui-même, auſſi-bien que ſon Interprete Commandin.

SECOND DISCOURS.

TROUVER LES DIAMETRES de même conjugaiſon des Sections, ſelon les differentes ſujétions des Arcs à décrire.

MAis pour retourner à notre propos, après une ſi longue digreſſion, il faut ſe ſouvenir de ce que nous avons enſeigné pour trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données. Et pour commencer aux pratiques de nos Arcs rampans, nous dirons que l'on ſuppoſe un Arc à décrire ſur deux pieds droits à une hauteur déterminée, ou non déterminée; & en l'un & l'autre cas ces deux pieds droits ſont paralleles ou inclinez l'un à l'autre, ſoit en talu ou en ſurplomb. De plus, ſi la hauteur eſt donnée, le plan qui la détermine eſt parallele au plan de la rampe de l'Arc, ou bien l'un & l'autre étant continuez ſe rencontrent.

Il faut donc parler de tous ces cas, & trouver premierement ſur toutes ces Hypotheſes, deux diametres de même conjugaiſon d'une ſection Conique qui faſſe l'Arc que l'on demande; & enſuite appliquer à ces diametres le Problême de Pappus, ſi c'eſt dans une Ellipſe, ou d'autres pratiques, ſi c'eſt une autre Section, pour en trouver les Axes & les Foyers ou Singliots, par le moyen deſquels la Section propoſée puiſſe être facilement déſignée.

Et pour y travailler avec ordre, nous commencerons premierement par l'explication de ceux dont la hauteur n'eſt point déterminée, pour paſſer enſuite aux autres.

PREMIERE OBSERVATION.

Décrire les Arcs, dont la hauteur n'eſt point déterminée.

PROBLEME PREMIER.

SOit donc (dans les 6. 7. & 8. Figures de la 3. Planche) les deux pieds droits A C, B D paralleles, ſoit qu'ils ſoient à plomb (comme en la 6. & 7. Figure,) ou que l'un ſoit en talu, & l'autre en ſurplomb (comme en la 8. Figure). La ligne de la rampe A B (qui conjoint les deux points A & B,) où l'Arc doit toucher les pieds droits, ſoit qu'elle ſoit horizontale (comme en la 6. Figure) ou inclinée à l'horizon (comme en la 7. & 8.) ſoit diviſée en deux également en H, & par H ſoit menée I H G parallele aux pieds droits; je dis que ſi l'on prend deux lignes égales de part & d'autre du point H ſur la ligne I G comme H G & H I à quelque diſtance qu'on les veüille étendre, les deux lignes A B & I G ſeront les diametres d'un cercle, ſi les lignes A H & H G ſont égales, ou les Axes d'une Ellipſe, ſi elles ſont inégales, & ſi la ligne A B eſt perpendiculaire aux pieds droits (comme en la 6. Figure); ou ſi elle leur eſt inclinée (comme aux deux autres Figures) elles ſeront les diametres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, qui paſſant par les points I & G, & ayant le point H pour centre, touchera les deux pieds droits en A & B. La démonſtration en eſt claire par la converſe de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius. *Fig. VI. VII. VIII. de la III. Planche.*

Au reſte, en cette Hypotheſe il n'y a que le cercle au ſeul cas cy-deſſus, ou l'Ellipſe en tous les autres, qui puiſſent réſoudre le Problême, n'étant pas poſſible de décrire aucune autre Section qui touche deux lignes paralleles.

PROBLEME SECOND.

Si les pieds droits A C & B D étans tous deux en talu, (comme en la 1. Figure de la 4. Planche) ſe rencontrent, *Fig. I. de la IV. Planche.*

étant continuez en G, la ligne de la rampe A B doit être diviſée en deux également en Z ; & du point G par Z, il faut mener la ligne G Z Y continuée indéfiniment. De plus, ſi vous partagez G Z en deux également en E, & qu'entre les deux points E & Z vous en preniez un autre en quelque endroit que ce puiſſe être, comme en F ; je dis que ce point F déterminera le ſommet d'une Ellipſe, qui touchera les deux pieds droits en A & B. Et que ſi en prenant la ligne F H égale à F Z, vous faites que comme G H eſt à H F, ainſi F Z ſoit à une quatriéme Z Y, le point Y en ſera le centre ; D'où ſi vous faites Y N égale à F Y, la toute F N en ſera le diametre.

Pour trouver l'autre diametre de même conjugaiſon ; il faut du point Y mener une ligne K Y I parallele à A B, & qui rencontre en K & I les lignes des pieds droits C A, D B continuées. Puis du point B il faut mener B L parallele à Z Y, & entre les deux I Y & L Y, trouver la moyenne Géometrique Y O, à laquelle il faut faire Y M égale, afin que la toute M I ſoit diviſée Harmoniquement en L & O ; & que par conſéquent la ligne M O ſoit l'autre diametre de même conjugaiſon avec F N d'une ellipſe, qui paſſant par les points A & B, y touche les lignes des pieds droits C A & D B.

La démonſtration s'en fait en cette ſorte ; parce que la ligne G H eſt à H F, comme F Z eſt à Z Y, en compoſant, permutant & compoſant G Y ſera à F Y, comme F Y à Z Y ; & partant le quarré de F Y ſera égal au rectangle G Y Z.

De plus, ſi du point A ſur K I vous tirez A P parallele à Z Y, il s'enſuivra que les deux B L, A P ſeront égales, auſſi-bien que les deux Y L, Y P ; & parce que les deux Y K & Y I ſont auſſi égales, auſſi-bien que les deux Y M & Y O ; il s'enſuivra encore que la ligne Y O étant moyenne Géometrique entre les deux Y I & Y L, ſon égale Y M ſera auſſi moyenne Géometrique entre les deux Y K

&

& Y P ; & les quarrez égaux des lignes Y O & Y M ſeront égaux aux rectangles égaux I Y L, K Y P.

Maintenant, le quarré F Y étant égal au rectangle G Y Z, & le quarré Y O au rectangle I Y L, les quarrez ſeront entre eux comme les rectangles : mais le rectangle G Y Z eſt au rectangle I Y L en raiſon compoſée des lignes G Y à I Y, c'eſt-à-dire, B L à L I, & de Y Z ou B L à L Y ; donc le quarré F Y ſera au quarré Y O en raiſon compoſée des lignes B L à I L, & de B L à Y L, c'eſt-à-dire, comme le quarré de B L au rectangle I L Y : mais le rectangle I L Y eſt égal au rectangle M L O (comme nous le démontrerons cy-deſſous.) Et partant le quarré B L ſera au rectangle M L O, comme le quarré F Y eſt au quarré Y O, ou en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diametre F N eſt au quarré du diametre M O : mais B L eſt parallele au diametre F N, & partant ordonnée au diametre M O ; donc le point B ſera dans l'Ellipſe, dont les lignes F N & M O ſeront diametres de même conjugaiſon. On démontrera par le même raiſonnement, que le point A ſera dans la même Ellipſe.

Il ne reſte donc plus qu'à prouver que les lignes C A & D B toucheront cette Ellipſe aux ſuſdits points A & B. Ce qui ſe fait ainſi. D'autant que les trois lignes G Y, F Y, Z Y, ſont en continuelle proportion Géometrique, & que Y N eſt égale à Y F ; il s'enſuit, par ce que nous avons dit cy-deſſus, que la toute G N eſt diviſée Harmoniquement aux deux points Z & F ; & partant par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, que les deux droites G A & G B touchent l'Ellipſe en A & B. Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, afin de faire voir, (comme je l'ai promis dans la ſuite de la démonſtration de ce Problême) que le rectangle I L Y eſt égal au rectangle M L O ; je dirai ainſi. Le quarré Y O eſt égal au rectangle I Y L, par ce qui a été dit cy-deſſus ; mais le quarré Y O eſt auſſi égal au

quarré Y L, & au rectangle M L O ; & le rectangle I Y L auſſi égal au même quarre Y L, & au rectangle I L Y ; le quarre Y L avec le rectangle M L O ſera égal au même quarré Y L avec le rectangle Y L I ; & partant, ſi on ôte le commun quarré Y L, le rectangle M L O reſtera égal au rectangle I L Y. Ce qu'il falloit montrer.

Pour avoir une entiere détermination de ce Problême, nous dirons que G Y étant à F Y comme F Y à Z Y ; par converſion de raiſon, & en permutant G Y ſera à F Y, comme G F eſt à F Z, où il ſe voit que la ligne G Y étant plus grande que F Y, il faut auſſi néceſſairement que la ligne G F ſoit plus grande que F Z ; c'eſt à-dire, que F Z ſoit moindre que la ligne E Z, qui eſt la moitié de G Z, & que par conſéquent, pour faire en ſorte que le Problême ſoit poſſible, il faut prendre le point du ſommet F entre les deux E & Z. Où il paroît que plus on le prendra éloigné du point Z, plus l'Ellipſe montera & s'agrandira à l'infini, à meſure que le ſommet F s'approchera du point E ; comme au contraire, elle diminuëra & deviendra plus plate en s'approchant de la ligne de la rampe A B, à meſure que le même ſommet F s'approchera du point Z.

Que ſi les lignes A G & B G ſont égales, l'on pourra ſe ſervir d'un cercle pour la ſolution de ce Problême, dont le centre ſera dans la ligne G Z, au point où elle ſera coupée par les lignes tirées des points A & B perpendiculaires aux lignes A C & B D. Mais en tous les autres cas de cette hypotheſe, il n'y a que la ſeule Ellipſe qui puiſſe ſervir à la ſolution du Problême, étant impoſſible de trouver aucune autre ſection qui touche les deux pieds droits, & dont le ſommet ſe trouve en dehors vers le point N.

PROBLEME TROISIEME.

Fig. II. III. IV. de la IV. Planche.

Si les deux pieds droits A C & B D ſont tous deux en ſurplomb (comme aux 2. 3. & 4. Figures de la 4. Planche) & étans continüez, ſe rencontrent en G, la ligne

de la rampe A B doit être diviſée en deux également en Z ; & du point G par Z, il faut mener G Z indéfiniment, & partager la ligne G Z en deux également en E. Après quoi, il faut ſçavoir que cette propoſition contient trois cas differens, à chacun deſquels il convient une particuliere Section Conique. Car ou l'on prendra le ſommet en E, auquel cas la Section qui réſout le Problême eſt une Parabole (comme en la 2. Figure ;) ou bien entre E & Z, auquel cas il faut une Ellipſe (comme en la 3. Figure ;) ou enfin entre E & G, & alors il faut une Hyperbole pour ſatisfaire à la queſtion (comme en la 4. Figure.) Il faut donc éxaminer les ſuſdits cas l'un après l'autre.

Premier Cas du troiſiéme Problême.

Si donc vous prenez le ſommet de votre ſection en E, point du milieu entre G & Z (comme en la 2. Figure de la 4. Planche) ; & qu'aux deux lignes E Z & Z B vous trouviez une troiſiéme proportionnelle E F, que vous faſſiez en E parallele à A B ; je dis que la Parabole dont le ſommet eſt E, le diametre E Z, & ſon parametre ou diametre contigu ſous un angle Z E F égal à A Z E, eſt la ligne E F, paſſera par les points A & B, où elle touchera les lignes A C & B D : car la ligne E F étant troiſiéme proportionnelle Géometrique aux deux E Z & Z B, le quarré de Z B ou de ſon égal Z A ſera égal au rectangle Z E F ; & partant les lignes Z A, Z B ſeront ordonnées au diametre E Z d'une Parabole dont le ſommet ſera E, & le diametre contigu E F. Et parce que E Z eſt égal à G E, les deux lignes G A & G B toucheront la Parabole aux points A & B, par la 33. du 1. des Coniques d'Apollonius. *Fig. II. de la IV. Planche.*

Second Cas du troiſiéme Problême.

Si vous prenez le ſommet de votre ſection entre les points E & Z (comme en la 3. Figure) au point F ; & qu'après avoir fait F H égal à F Z, vous faites que comme la *Fig. III. de la IV. Planche.*

ligne G H eſt à H F, ainſi F Z ſoit à une quatriéme Z Y. Et ſi vous tirez par le point Y la ligne K Y I parallele à la rampe A B, & rencontrant les lignes A C, B D continüées en K & I, ſur laquelle K I des points A & B, vous menez des lignes A P & B L paralleles à G Y, & qu'entre les deux K Y & Y P, ou leurs égales I Y & Y L, vous faites des moyennes Géométriques de part & d'autre Y M & Y O; & enfin ſi vous prenez Y N égale à Y F, je dis que les deux lignes F N & M O ſont diametres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, qui touchera les deux lignes des pieds droits A C & B D aux points A & B.

La démonſtration en eſt quaſi la même que celle du Problême précédent, & elle ſe fait ainſi. Parce que G H eſt à H F comme F Z à Z Y, en compoſant, permutant, & compoſant, G Y ſera à F Y comme F Y à Z Y; & partant le Quarré F Y ſera égal au rectangle G Y Z. Mais le rectangle K Y P ou I Y L eſt auſſi égal au quarré M Y ou Y O; partant le rectangle ſera au rectangle comme le quarré eſt au quarré. Maintenant le rectangle G Y Z eſt au rectangle K Y P en raiſon compoſée des lignes G Y à K Y, c'eſt-à-dire, A P à K P, & Z Y ou ſon égale A P à Y P: Donc le quarré F Y ſera au quarré M Y en raiſon compoſée des lignes A P à K P, & A P à P Y, c'eſt-à-dire, comme le quarré A P eſt au rectangle K P Y. Mais le rectangle K P Y eſt égal au rectangle M P O (comme nous dirons cy-deſſous.) Donc le quarré F Y eſt au quarré M Y, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diametre F N eſt au quarré du diametre M O, comme le quarré A P eſt au rectangle M P O. Nous prouverons par le même diſcours que le quarré B L a auſſi la même raiſon au rectangle M L O; mais les lignes A P & B L ſont paralleles au diametre F N, elles ſeront donc ordonnées au diametre M O, & les points A & B ſeront dans l'Ellipſe, dont le centre ſera Y, & les lignes F N, M O diametres de même conjugaiſon.

Je dis de plus, que ladite Ellipſe touchera les lignes

AC, BD aux mêmes points A & B : parce que la ligne FY eſt moyenne Géometrique entre les deux GY & YZ, & YN eſt égale à FY ; la toute GN ſera diviſée Harmoniquement aux deux points F & Z, & la ligne GZ ſera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes GN & GF ; & la ligne AZ eſt égale à ZB & parallele à MO ; donc les deux lignes AG & BG toucheront aux points A & B l'Ellipſe dont le ſommet eſt F, les diametres de même conjugaiſon FN & MO, & les ordonnées AZ & BZ, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Il ne reſte donc plus qu'à démontrer que les deux rectangles KPY & MPO ſont égaux, ce qui ſe fait en cette maniere. Le quarré MY & le rectangle KYP ſont égaux ; mais le quarré MY eſt égal au rectangle MPO avec le quarré PY ; & le rectangle KYP eſt égal au rectangle KPY avec le même quarré PY ; ôtant donc des égaux le même quarré PY, les reſtes ſeront égaux, ſçavoir le rectangle KPY au rectangle MPO. Ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi les lignes AG & BG ſont égales, & que des points A & B l'on mene des lignes perpendiculaires aux mêmes AC & BD, elles ſe rencontreront dans la ligne GZ en un point qui ſera le centre d'un cercle utile pour la ſolution de ce Problême.

Troiſiéme Cas du troiſiéme Problême.

Enfin, ſi vous prenez le point F entre E & G (comme en la 4. Figure) ; & que FH étant priſe égale à GF, vous faſſiez que comme ZH eſt à HF, ainſi FG ſoit à une quatriéme GY ; puis par le point Y, ſi vous tirez indéfiniment la ligne KYI parallele à la ligne de la rampe AB, & rencontrant les lignes CA & DB continüées en K & I, ſur laquelle IK des points A & B vous faſſiez tomber les lignes AP & BL paralleles à ZY, afin qu'entre les deux PY & YK, ou leurs égales LY & IY vous puiſſiez prendre les *Fig. IV. de la IV. Planche.*

moyennes Géometriques de part & d'autre Y M & Y O, & qu'enfin vous faſſiez Y N égale à Y F.

Je dis que Y eſt le centre d'une Hyperbole, dont les diametres de même conjugaiſon ſont F N & M O, & le ſommet F, laquelle paſſant par les points A & B, y touchera les deux pieds droits A C & B D.

Parce que la ligne M Y ou O Y eſt moyenne Géometrique entre les deux P Y & Y K, ou leurs égales L Y & I Y; le quarré de M Y ou de Y O ſera égal au rectangle K Y P. De plus, parce que Z H eſt à H F, comme F G eſt à G Y, en compoſant, & permutant Z F ſera à F Y comme H F ou ſon égale F G à G Y, & en compoſant Z Y ſera à F Y comme F Y à G Y; & partant le quarré de F Y ſera égal au rectangle Z Y G. Donc le quarré F Y ſera au quarré M Y, comme le rectangle Z Y G eſt au rectangle K Y P: Mais le rectangle eſt au rectangle en raiſon compoſée des lignes Z Y à Y P ou ſon égale A Z, & de Y G à Y K, c'eſt-à dire, (à cauſe de la ſimilitude des triangles G Z A, G Y K,) de G Z à la même A Z: Donc le quarré F Y, ſera au quarré M Y, en raiſon compoſée des lignes Y Z à A Z, & G Z à A Z, c'eſt-à-dire, comme le rectangle Y Z G au quarré A Z. Mais le rectangle Y Z G eſt égal au rectangle N Z F, (ainſi que nous le démontrerons cy-après;) Et partant le quarré F Y ſera au quarré M Y, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diametre N F ſera au quarré du diametre M O, comme le rectangle N Z F eſt au quarré A Z: Mais la ligne A B eſt parallele à M O, & diviſée en deux également en Z; Donc l'Hyperbole dont le ſommet eſt F, le centre Y, & les diametres de même conjugaiſon N F & M O, paſſera par les points A & O.

Je dis de plus, qu'elle y touchera les lignes des pieds droits A C & B D: ce que je prouve en cette maniere. D'autant que la ligne F Y eſt moyenne Géometrique entre les deux Z Y & G Y, & que N Y eſt égale à F Y, la toute N Z ſera diviſée Harmoniquement aux deux points G &

F ; & la ligne G Z ſera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes N Z & F Z ; & par conſéquent, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, les deux lignes A G & B G toucheront l'Hyperbole en A & B.

Il ne reſte plus qu'à prouver que le rectangle Y Z G eſt égal au rectangle N Z F : ce que je fais ainſi. Puis que Z Y eſt à F Y, comme F Y eſt à Y G ; par converſion de raiſon, & permutant Z Y ſera à F Y ou ſon égale Y N comme F Z à F G ; & compoſant Z N ſera à Y N comme Z G à F G ; & par converſion de raiſon Z N ſera à Z Y comme Z G eſt à Z F ; & partant le rectangle des moyennes Y Z G ſera égal au rectangle des extrêmes N Z F. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Décrire les Arcs rampans dont les hauteurs ſont données.

PREMIERE HYPOTHESE.

Quand les lignes des pieds droits ſont paralleles.

PROBLEME QUATRIE'ME.

SI les pieds droits A C, B D ſont paralleles (comme aux 5. & 6. Figures de la 4. Planche) & la ligne E F, qui détermine la hauteur, eſt auſſi parallele à celle de la rampe A B ; en ce cas il ne faut que diviſer la ligne A B en deux également en H, & tirer par le point H la ligne I H G parallele aux lignes des pieds droits, & rencontrant E F en G ; puis en prenant de l'autre part du point H la ligne H I égale à H G, le point H ſera le centre, & les deux lignes A B, G I diametres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, laquelle touchera les deux pieds droits aux points donnez A & B, & la ligne E F en G ; avec cette difference, que ſi A B eſt perpendiculaire aux pieds droits, *Fig. V. VI. de la IV. Planche.*

& que H G ſoit égale à A H, les deux A B & I G ſeront les diametres d'un Cercle ; ou les Axes de l'Ellipſe propoſée, ſi H G & A H ſont inégales.

La démonſtration eſt toute entiere dans la 32. du 1. & la converſe de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

PROBLEME CINQUIE'ME.

Figure VII. VIII. de la IV. Planche.

Si les pieds droits A C, B D étant paralleles, la ligne E F qui détermine la hauteur rencontre la ligne de la rampe A B comme au point I, ſoit de la part de B, (ainſi que la 7. Figure de la 4. Planche,) ou de la part de A (comme en la 8. Figure ;) il faudra diviſer comme deſſus la ligne A B en deux également au point H, & tirer H G indéfiniment de part & d'autre du point H, & parallele aux pieds droits, qui coupe la ligne E F au point G. Puis il faut faire G K égale à G F, & mener I K, à laquelle il faut auſſi mener du point F une ligne parallele F L, & faire la ligne G M égale à G L. Je dis que le point M ſera celui où l'Ellipſe que l'on cherche doit toucher la ligne E F ; & que ſi après avoir mené M N parallele à A B, vous faites H O égale à H N, & ſur la ligne G O comme diametre, vous décrivez un Cercle G R O, qui coupe en R la ligne H R, tirée du point H perpendiculaire à H G, faiſant enſuite les deux lignes H P, & H Q égales à H R, vous aurez les deux lignes P Q & A B pour ſes diametres de même conjugaiſon.

La démonſtration s'en fait en cette maniere, après avoir mené la ligne M V parallele à H G. D'autant que G K eſt égale à G F, G L à G M, & L F parallele à I K, la ligne I G ſera à G K, c'eſt-à-dire, G F, comme G F eſt à G L, c'eſt-à-dire, G M. Et parce que M V eſt parallele à G H, la ligne I H ſera à A H ou H B, comme I G eſt à G F ; & A H ou H B à H V, comme F G à G M, c'eſt-à-dire, que H B ſera moyenne Géometrique entre les deux I H & H V ; & parce que A H eſt égale à H B, la toute A I dans la 7. Figure

Figure ſera diviſée Harmoniquement aux deux points V & B, ou dans la 8. Figure la toute B I aux deux points V & A, & en l'une & en l'autre la ligne V I ſera la moyenne Harmonique entre les deux A I & B I: Et par conſequent H V ſera à V B, comme H B à B I; & A I à I H, comme V I à I B. Par le même raiſonnement nous montrerons que le rectangle G H O, c'eſt-à-dire, G H N étant égal au quarré de H R ou H P, les trois lignes Q G, N G & P G ſont auſſi en continüelle proportion Harmonique.

Maintenant la raiſon du quarré H B, c'eſt-à-dire, du rectangle I H V au rectangle A V B étant compoſée des raiſons des lignes I H à A V, & H V à V B, c'eſt-à-dire, H B à B I; & cette compoſition étant la même que celle de I H à B I, c'eſt-à-dire, A I à I V, & de H B à A V; & celle-ci étant encore la même que de A I à A V, & de H B à I V; il s'enſuit que la raiſon du quarré H B au rectangle A V B ſera compoſée des raiſons de A I à A V, & de H B à I V. Mais parceque A I eſt à I H, comme V I eſt à B I, en permutant, & par converſion de raiſon dans la 7. Figure, ou en diviſant dans la 8; A I ſera à A V, comme I H à H B; & partant la compoſition de raiſons de A I à A V, & de H B à I V, ſera la même que celle de I H à H B, & de H B à I V, c'eſt-à-dire, la même de I H, à I V, le quarré donc de H B, c'eſt-à-dire, le rectangle A H B ſera au rectangle A V B, comme I H eſt à I V, c'eſt-à-dire, comme G H eſt à M V ou H N: Mais comme G H eſt à H N, ainſi eſt le quarré P H, c'eſt-à-dire, le rectangle Q H P au quarré de H N ou M V; Donc le rectangle A H B ſera au rectangle A V B; comme le rectangle Q H P eſt au quarré de M V; & en permutant le rectangle A H B ſera au rectangle Q H P, comme le rectangle A V B eſt au quarré de M V. Et partant l'Ellipſe dont A B & Q P ſeront diametres de même conjugaiſon, paſſera par le point M, d'où ſont tirées les deux ordonnées M V & M N paralleles auſdits diametres.

Il paroît encore qu'elle touchera les deux pieds droits A C & B D aux points A & B, parce que ces points ſont au bout du diametre A B, & que les pieds droits ſont paralleles à l'autre diametre P Q. Je dis de plus, qu'elle touchera la ligne E F au point M; ce qui eſt clair par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Si la ligne de la rampe étant perpendiculaire aux pieds droits, la ligne tirée du point H en M ſe trouvoit auſſi perpendiculaire à celle de la hauteur E F, & égale à l'une des deux A H ou B H, ce ſeroit un Cercle qui réſoudroit la queſtion, dont le centre ſeroit H, & le diametre A B; ce qui eſt clair par ce qui a été démontré cy-deſſus.

SECONDE HYPOTHESE.

Quand les pieds droits ſe rencontrent, & la ligne de la hauteur eſt parallele à celle de la rampe.

PROBLEME SIXIE'ME.

Fig. 1. de la V. Planche.

SI les pieds droits A C & B D ne ſont point parallels, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 5. Planche,) en ſorte qu'étant continüez, ils ſe rencontrent au-deſſous au point G, de la part de C & D; & ſi la ligne E F qui détermine la hauteur eſt parallele à celle de la rampe, il faut couper la ſuſdite ligne A B en deux également au point Z, par lequel de G il faut tirer indéfiniment la ligne G Z, qui coupera auſſi E F en deux également en H; duquel point H il faut tirer la ligne H B, & la couper en deux également en X, par où du point F il faut mener la ligne F X qui rencontre G Z en Y, puis mener A H & E Y qui ſe rencontrent en V. Je dis que Y ſera le centre de l'Ellipſe, qui touchera les trois lignes A C en A, B D en B, & E F en H. Et que ſi l'on fait Y N égale à Y H, & que menant par le point Y la ligne K Y I parallelle à A B, & A P, B L paralleles à

G Y, l'on faſſe Y M moyenne Géometrique entre les deux K Y & Y P, & Y O égale à Y M : les deux lignes N H & M O en ſeront les diametres de même conjugaiſon.

La démonſtration s'en fait en cette maniere, après avoir tiré les lignes Z X, Z V, A Y & B Y. D'autant que la ligne K Y I eſt parallele à A B, elle ſera diviſée également en Y : & partant les deux triangles E Y K, F Y I ſur baſes égales, & entre mêmes paralleles ſeront égaux, auſſi-bien que les deux A Y K, B Y I. Et partant les deux triangles E Y A, F Y B ſeront égaux ; mais les deux E H Y, F H Y ſont auſſi égaux. Il y aura donc même raiſon du triangle E Y A au triangle E H Y, que du triangle F Y B à F H Y : Mais les triangles E Y A & E Y H ayans même baſe E Y, ſont entre eux comme les lignes A V & V H ; & les triangles F Y B, F Y H comme les lignes B X & X H : Donc les lignes A V & V H ſeront entre elles comme les lignes B X & X H ; mais ces dernieres ſont égales par la conſtruction : Donc les deux autres A V & V H ſeront auſſi égales ; & partant V X ſera parallele & égale à la moitié de A B, c'eſt-à-dire, A Z. Et parce que dans le triangle A B H, la ligne H B eſt à B X comme A B eſt à B Z, la ligne X Z ſera parallele & égale à la moitié de la baſe A H, c'eſt-à-dire, à V H. Par la même raſon V Z ſera parallele & égale à X H.

Maintenant, ſi l'on continuë les lignes H B, E Y juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en R : Comme nous avons montré que A Z étoit égale à V X ; A Z ſera a E H, c'eſt-a-dire, Z G a G H, comme V X eſt a la même E H, c'eſt-a-dire, X R a R H ; & en changeant, & par converſion de raiſon, G H ſera a H Z, comme R H a H X, ou a ſon égale V Z. Mais a cauſe de la ſimilitude des triangles H Y R, V Y Z, le côté R H eſt a V Z comme H Y eſt a Y Z : Donc G H ſera a H Z comme H Y eſt a Y Z ; & en permutant, & diviſant G Y ſera a H Y comme H Y a Y Z, c'eſt-a-dire, que H Y, ou ſon égale N Y ſera moyenne Géometrique entre les deux G Y & Y Z ; & partant la toute G H

ſera diviſée Harmoniquement en Z & N ; & la ligne G Z ſera moyenne Harmonique entre les deux G H & G N ; & G Y moyenne Arithmétique entre les mêmes. Par même raiſonnement nous montrerons que K P eſt moyenne Harmonique entre les deux O K & K M ; & K Y moyenne Arithmétique entre les mêmes : auſſi bien qu'entre les deux M I & I O, la ligne I L ſera moyenne Harmonique, & I Y Arithmétique.

Maintenant nous pourrons faire voir par le même diſcours dont nous nous ſommes ſervis aux précedentes propoſitions, que le rectangle H Y N eſt au rectangle M Y O, comme le quarré de A P eſt au rectangle K P Y, ou ſon égal M P O ; & comme le quarré B L eſt au rectangle Y L I ou ſon égal O L M ; & comme A P & B L ſont paralleles à N H, elles ſeront ordonnées au diametre M O ; & l'ellipſe, dont les diametres de même conjugaiſon ſeront H N & M O, paſſera par les points A & B, où elle touchera auſſi les lignes A G, B G par la 34. du 1. des Coniques, & la ligne E F en H par la converſe de la 6. du 2. du même. Ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi les deux lignes A G & B G étant égales, & A Y perpendiculaire à A C, elle ſe trouvoit égale a Y H ; ce ſeroit un Cercle, qui réſoudroit le Problême dont le centre ſeroit Y, & Y H demi-diametre.

PROBLEME SEPTIE'ME.

Fig. II. III. IV. de la V. Planche.

Si les pieds droits A C & B D ne ſont point paralleles, mais en ſurplomb (comme aux 2. 3. & 4. Fig. de la 5. Planche), en ſorte qu'étant prolongez, ils ſe rencontrent au-deſſus, comme au point G de la part de A & B ; & ſi la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire eſt parallele à celle de la rampe A B. Il y a trois cas differens en cette propoſition, qui demandent chacun une Section Conique pour leur ſolution, en la même maniere que nous avons dit en l'explication du troiſiéme Problême cy-

deſſus : car après avoir diviſé la ligne de la rampe A B en deux également en Z, & tiré du point G la ligne G Z : il arrivera que la ligne E F paſſera par le milieu de la ſuſdite ligne G Z en H (comme en la 2. Figure,) ou bien elle paſſera au-deſſous (comme en la 3. Figure); en ſorte que la ligne Z H ſoit moindre que H G ; ou enfin elle paſſera au-deſſus (comme en la 4. Figure,) en ſorte que G H ſoit moindre que H Z. Au premier cas il faudra une Parabole pour réſoudre la queſtion ; au ſecond une Ellipſe ; au troiſiéme une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du Problème ſeptiéme.

Soit (comme en la 2. Figure de la 5. Planche,) la ligne de la hauteur E F, qui paſſe au point H, où la ligne G Z eſt diviſée en deux également ; & après avoir tiré les deux lignes A H & B H, ſoit B H auſſi partagée en deux également en X, & tirée indéfiniment F X, à laquelle du point E il faut mener E V parallele. Je dis que la ſection qui touchera les trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H, ſera une Parabole. Ce que je démontre en cette maniere. *Fig 11. de la V. Planche.*

D'autant que la ligne G Z eſt double de H Z, & que E F eſt parallele à A B, la ligne G B ſera auſſi double de B F, & G A double de E A : Mais la ligne B H eſt auſſi double de B X ; & partant dans le triangle G H B, la ligne G B ſera à B F comme H B à B X : Donc la ligne F X ſera parallele à G H. De plus, la ligne E V ayant été faite parallele à F X, elle le ſera auſſi à G H ; & partant dans le triangle G H A, la ligne G A ſera à A E comme H A à A V : Mais G A eſt double de A E ; donc H A ſera auſſi double de A V ; c'eſt-à-dire, que la ligne E V diviſera A H en deux également en V ; auſſi-bien que F X la ligne B H en X ; & G Z la ligne A B en Z. Et partant par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius, les trois lignes G Z, F X, E V ſeront diamétres d'une ſection, que les lignes A C, B D & E F toucheront

aux points A, B, & H : Mais ces trois diamétres ſont paralleles ; donc la ſection ſera une Parabole par la 46. du 1. des mêmes Coniques. Si donc nous faiſons H I troiſiéme proportionnelle Géometrique aux deux lignes H Z & A Z ; & ſi nous décrivons une Parabole, dont le diamétre ſoit H Z, ſon paramétre ou diamétre contigu H I, le ſommet H, & l'angle des ordonnées G H F ; elle paſſera par les points ſuſdits A, B, & H, où elle touchera les trois lignes A C, B D, & E F.

Et premierement, il eſt conſtant qu'elle paſſera par le point H, puiſqu'il en eſt ſuppoſé le ſommet ; enſuite H I étant troiſiéme proportionnelle Géometrique aux deux H Z & A Z, le quarré A Z ou B Z ſera égal au rectangle Z H I ; & partant les deux points A & B ſeront dans la Parabole, laquelle touchera les lignes A C & B D aux mêmes points, par la 33. du 1. des mêmes Coniques, & la ligne E F en H par la converſe de la 46. du même.

Second Cas du Problème ſeptiéme.

Fig. III. de la V. Planche. Que ſi la ligne de la hauteur E F coupe G Z, en ſorte que G H ſoit plus grande que H Z (comme en la 3. Figure de la 5. Planche,) après avoir tiré les lignes A H & B H, & diviſé H B en deux également en X, tiré F X, juſqu'à ce qu'elle rencontre G Z au point Y, & mené E Y. Je dis que le point Y ſera au-deſſous du point H vers Z, & que la ſection qui touchera les trois lignes A C, B D, E F aux points A, B, H, ſera une Ellipſe, dont le centre ſera Y. Et partant ſi nous faiſons Y N égale à Y H, & qu'après avoir mené par le point Y la ligne K Y I paralléle à A B, & ſur laquelle tombent les lignes A P & B L paralléles à G Z, nous faiſons (ainſi qu'il s'eſt dit tant de fois) Y M & Y O moyennes Géometriques entre K Y & Y P, ou entre I Y & Y L, les deux lignes H N & M O en ſeront les diamétres de même conjugaiſon.

Il ſe démontre en cette maniere, après avoir continué

les lignes V E, B X juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en R, & mené les lignes V X, V Z, X Z: A Y, B Y: & F ♪ paralléle à G Y. D'autant que G H eſt plus grande que H Z, & E F paralléle à A B, la ligne G F ſera auſſi plus grande que F B: Mais H X eſt égale à B X; donc dans le triangle G H B la ligne G F aura plus grande raiſon à F B que H X à B X, & en compoſant G B aura plus grande raiſon à F B que H B à B X: Mais comme G B eſt à F B, ainſi H B eſt à B ♪: Et par conſéquent H B aura plus grande raiſon à B ♪ qu'à B X; & partant B X ſera plus grande que B ♪; & le point X ſera entre ♪ & H; & l'angle B F Y ſera plus grand que l'angle B F ♪, c'eſt-à-dire, B G Z: Et partant la ligne F Y rencontrera G Z continuée de la part de Z au point Y.

De plus, comme les triangles K E Y, I F Y, ſur baſes égales K Y, & I Y, & entre mêmes parallèles K I, E F, ſont égaux; auſſi-bien que les triangles K A Y, I B Y, & E Y H, F Y H. Si des égaux K E Y, I F Y on ôte les égaux K A Y, I B Y; les reſtes ſeront égaux, c'eſt-à-dire, les triangles A E Y, B F Y: Et partant le triangle A E Y aura même raiſon au triangle E Y H que B F Y à F Y H. Mais les triangles A E Y, E Y H ayant même baſe E Y, ſont entr'eux comme les lignes A V & V H; & les triangles B F Y, F Y H ayant auſſi même baſe F Y, ſont comme les lignes B X & X H; la ligne A V ſera à V H comme B X eſt à X H: Mais B X eſt égale à X H par la conſtruction; donc A V ſera auſſi égale à V H; & partant la ligne E Y coupera A H en deux également en V; auſſi-bien que F Y la ligne B H en X; & G Y la ligne A B en Z; & le point Y a été démontré au deſſous du point G vers Z: Et par conſéquent les trois lignes E Y, F Y, G Y ſeront diamétres d'une Ellipſe qui touchera les trois lignes A G, B G, E F aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Je dis de plus, que les lignes H N & M O en ſeront les diamétres de même conjugaiſon. Comme A H eſt double de H V, auſſi-bien que B H double de H X: la ligne V X.

dans le triangle A H B ſera parallele, & égale à la moitié de la ligne A B, c'eſt-à-dire, à A Z. Par la même raiſon X Z dans le même triangle ſera égale, & paralléle à la moitié de la ligne A H, c'eſt-à-dire, à V H; & V Z égale & paralléle à H X; & partant A Z ſera à E H, c'eſt-à-dire, Z G à G H, comme V X à la même E H, c'eſt-à-dire, X R à R H: & en changeant & diviſant G H ſera à H Z comme R H à H X, ou à ſon égale V Z. Mais parce que dans le triangle R H Y, la ligne R H eſt à V Z comme H Y à Y Z; la ligne G H ſera à H Z comme H Y à Y Z; & en permutant & compoſant G Y ſera à H Y comme H Y à Y Z; c'eſt-à-dire, que H Y ſera moyenne Géometrique entre les deux G Y & Y Z: Mais Y N eſt égale à Y H. Donc la toute N G eſt diviſée Harmoniquement aux points Z & H: & G Z eſt moyenne Harmonique entre les deux N G & G H; & G Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant nous démontrerons, ainſi qu'en la précedente propoſition, que le quarré de A P ou B L eſt au rectangle M P O ou O L M, comme le quarré du diamétre H N eſt au quarré du diamétre M O. Mais les lignes A Z & B Z ſont égales entr'elles, & paralléles à M O; elles ſont donc ordonnées à l'autre diamétre H N dans l'Ellipſe, dont les diamétres de même conjugaiſon ſont H N & M O, laquelle touchera les lignes A C, B D en A & B, par la 34. du 1. des Coniques, & E F en H par la converſe de la 6. du 2. des mêmes.

Que ſi les lignes A G & B G étoient égales, & A Y étant perpendiculaire à A C ſe trouvoit égale à Y H; ce ſeroit un cercle qui ſatisferoit au Problême dont le centre ſeroit Y, & le demi-diamétre Y H, ou A Y.

Troiſiéme Cas du ſeptiéme Problême.

Fig. IV. de la V. Planche. Enfin ſi la ligne de la hauteur E F coupe G Z, en ſorte que G H ſoit moindre que H Z (comme en la 4. Figure de la 5. Planche,) après avoir tiré comme ci-deſſus les lignes A H,

AH, BH, & diviſé BH en deux également en X, & mené FX indéfiniment de part & d'autre, laquelle rencontre GZ prolongée en Y, & AB en T, & tiré EY indéfiniment de part & d'autre, qui rencontre AH en λ, & AB en S.

Je dis que le point Y ſera dans la ligne GZ prolongée de la part de G, & que la ſection qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B & H, ſera une Hyperbole, dont le centre ſera Y. Et partant ſi nous faiſons YN égale à YH, & ayant mené la ligne PYL par le centre Y, & parallèle à AB, ſi nous continuons AG & BG juſqu'en K & I; & tirant AP & BL paralléles à GZ, ſi nous prenons YM & YO moyennes Géometriques entre les deux KY & YP, ou leurs égales IY & YL: les lignes NH & MO en ſeront les diametres de même conjugaiſon.

Il ſe démontre ainſi, après avoir mené la ligne XQV paralléle à AB, & rencontrant la ligne YE au point V. D'autant que EF eſt parallèle à AB, & AZ égale à BZ; EH ſera auſſi égale à FH; mais dans le Triangle YZS, la ligne EH eſt à ZS comme YH eſt à YZ; Et dans le Triangle YZT, comme YH à YZ, ainſi HF à ZT. Donc EH ſera à ZS comme HF à ZT; & partant ZS ſera égale à ZT. Mais ZT eſt à QX comme ZS à VQ: Donc QX ſera auſſi égale à QV; & partant BZ ſera à QX, c'eſt-à-dire, ZH à HQ comme AZ à VQ; & par conſéquent le point V eſt dans la ligne AH, & le même que le point λ, & en la même raiſon de AH à HV, comme de ZH à HQ, ou BH à HX; c'eſt-à-dire, que la ligne YES coupera AH en deux également en V, comme YFT la ligne BH en X, & YHZ la ligne AB en Z: & le point Y eſt au-deſſus du point G, comme nous le démontrerons ci-deſſous; & par conſéquent les trois lignes YES, YFT, YHZ, ſeront diamétres d'une Hyperbole qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques.

Je dis de plus, que les lignes HN & MO en ſont les

diamétres de même conjugaiſon, après avoir continué la ligne BH juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EY en R, & mené VZ. Nous démontrerons comme en la propoſition précédente, que VX eſt paralléle & égale à AZ, & VZ paralléle & égale à HX; & que par conſéquent AZ ſera à EH, c'eſt-à-dire, ZG à GH comme VX à la même EH, c'eſt-à-dire, XR à RH; & en changeant & diviſant GH ſera à HZ comme RH à HX ou à ſon égale VZ. Mais dans le triangle YVZ, la ligne RH eſt à VZ comme YH eſt à YZ; Donc YH ſera à YZ comme GH à HZ; & en changeant, permutant, & par converſion de raiſon YZ ſera à YH comme YH à YG; c'eſt-à-dire, que YH ſera moyenne Géometrique entre les deux YZ & YG: Et comme YN eſt égale à YH, la toute NZ ſera diviſée Harmoniquement aux points G & H, & la ligne GZ ſera moyenne Harmonique entre les deux NZ & ZH, & la ligne YZ moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, parce que le quarré YH eſt égal au rectangle ZYG, & le quarré YO au rectangle PYK; le quarré ſera au quarré comme le rectangle eſt au rectangle: Mais la raiſon du rectangle ZYG au rectangle KYP eſt compoſée des raiſons des lignes ZY à PY, ou à ſon égale AZ, & & de YG à YK, c'eſt-à dire, (à cauſe de la ſimilitude des triangles YGK & ZGA) de GZ à AZ: Donc le quarré YH ſera au quarré YO en raiſon compoſée des raiſons de ZY à AZ; & de GZ à AZ, c'eſt-à-dire, comme le rectangle YZG au quarré AZ. Mais le rectangle YZG eſt égal au rectangle NZH (comme nous le démontrerons ci-deſſous;) Donc le quarré YH ſera au quarré YO, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diamétre tranſverſe NH ſera au quarré du diametre droit MO, comme le rectangle NZH au quarré AZ. Mais AZ eſt égale à ZB, & parallele au diamétre MO, elles ſeront par conſéquent ordonnées au diamétre NZ; & les points A & B ſeront dans l'Hyperbole, dont NH & MO ſeront diamétres de même conjugaiſon, & le ſommet au point H.

Il paroît de plus, que les lignes A G & B G toucheront la ſuſdite Hyperbole aux mêmes points A & B, parce que la ligne N Z eſt diviſée Harmoniquement en G & H, par la 34. du 1. des Coniques; & la ligne E F au ſommet H, parce qu'elle eſt parallele à l'ordonnée A B par la converſe de la 6. du 2. des mêmes.

Il faut maintenant faire voir que le point Y eſt dans la ligne Z G prolongée de la part de G, comme nous l'avons promis ci-deſſus: ce qui ſe fait en cette maniere, après avoir tiré la ligne F♪ parallele à G Z. D'autant que G H eſt ſuppoſée moindre que H Z, & que E F eſt parallele à A B; G F ſera auſſi moindre que F B: Mais H X eſt égale à X B: Donc G F aura moindre raiſon à B F, que H X à X B; & en compoſant G B aura moindre raiſon à B F, que H B à B X; Mais comme G B à B F, ainſi H B à B♪; Donc H B aura moindre raiſon à B♪ qu'à B X; Et partant B♪ ſera plus grande que B X, & l'angle B F X moindre que l'angle B F♪, ou ſon égal B G H: Et partant la ligne X F rencontrant ♪F en F, rencontrera auſſi ſa paralléle Z G prolongée au-deſſus de G en Y.

De plus, il faut montrer que les rectangles Y Z G & N Z H ſont égaux; ce qui ſe fait ainſi. Parce que Z Y eſt à Y H comme Y H à Y G, par converſion de raiſon, & en permutant Z Y ſera à H Y, ou à ſon égale Y N comme Z H à G H, & en compoſant, & par converſion de raiſon N Z ſera à Y Z comme G Z à H Z. Et partant le rectangle des moyennes Y Z G ſera égal à celui des extrêmes N Z H. Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

TROISIE'ME HYPOTHESE.

Quand les pieds droits ne ſont point paralleles entr'eux, ni la ligne de la hauteur à celle de la rampe.

PROBLEME HUITIE'ME.

Figure 1. de la VI. Planche.

SI les pieds droits A C, B D ne ſont point paralleles, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 6. Planche) en ſorte qu'étant prolongez, ils ſe rencontrent au-deſſous, comme au point G de la part de C & D. Et ſi la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, n'eſt point parallele à celle de la rampe A B; mais l'une & l'autre étant prolongées, ſe rencontrent comme au point I.

Il faut premierement couper la ligne A B en deux également en Z, & tirer indéfiniment la ligne G Z; puis entre les deux E I & I F trouver une moyenne proportionnelle Harmonique I H, & du point H mener les deux H B & H A; enſuite il faut diviſer H B en deux également en X, & mener F X qui rencontrera la ligne G Z prolongée en Y, & joindre les points E Y.

Je dis que Y ſera le centre d'une Ellipſe qui touchera les trois lignes A C en A, B D en B, & E F en H; & que ſi ayant tiré la ligne H Y indéfiniment, & fait Y T égale à Y H, l'on méne par le point Y la ligne N Y M parallele à E F, ſur laquelle des points A & B l'on méne les deux A ♪ & B P paralleles à H T, auſſi-bien que A ↓ & B S paralleles à M N; & qu'enfin entre les deux N Y & Y ♪, l'on prenne Y ε moyenne Géométrique, à laquelle on faſſe Y β égale. Je dis que les deux lignes H T & ε β ſeront les diamétres de même conjugaiſon de la ſuſdite Ellipſe.

Pour le démontrer, il faut mener par le point Y la ligne K Y Q parallele à A B, & Y ϒ perpendiculaire à G B, & Y ϰ à G A; puis ſur A B prolongée, des points E & F tirer les

lignes Eμ & Fν paralleles à G Z, & mener A Y, B Y ; après quoi je raiſonne en cette maniere.

Puiſque K Q eſt parallele à A B, & que A B eſt diviſée en deux également en Z, par la ligne G Z, la ligne K Q le ſera pareillement en Y ; & les triangles G K Y, G Q Y ſeront égaux, & leurs côtez ſeront en raiſon réciproque de leurs hauteurs, c'eſt-à-dire, que le côté G K ſera au côté G Q, c'eſt-à-dire, G A à G B, comme Yν hauteur du triangle G Q Y eſt à Yλ hauteur du triangle G Y K. De plus, les triangles A E Y & B F Y étant l'une à l'autre en raiſon compoſée de celles de leurs côtez & de leurs hauteurs, & la hauteur du triangle A E Y étant Yλ, & Yν celle du triangle B F Y ; le triangle A E Y ſera à B F Y en raiſon compoſée des raiſons du côté A E au côté B F & de la hauteur Yλ à la hauteur Yν. Mais la raiſon du côté A E à B F eſt encore compoſée des raiſons de A E à Eμ, c'eſt-à-dire, (à cauſe de la ſimilitude des triangles A Eμ & A G Z) de A G à G Z, de Eμ à Fν, & de Fν à F B, c'eſt-à-dire, G Z à G B (à cauſe que les triangles B Fν, B G Z ſont auſſi ſemblables.) La raiſon donc du triangle A E Y à B F Y ſera compoſée des raiſons de A G à G Z, Eμ à Fν, G Z à G B, & Yλ à Yν. Mais il a été démontré ci-deſſus que Yλ eſt à Yν comme G B eſt à G A ; & les raiſons de A G à G Z, & G Z à G B ſont égales à celle de A G à G B ; & partant le triangle A E Y ſera à B F Y en raiſon compoſée de A G à G B, G B à G A, & Eμ à Fν : Mais les raiſons de A G à G B, & G B à G A ſe détruiſent ; il ne reſte donc plus que la raiſon de Eμ à Fν pour celle du triangle A E Y à B F Y : Mais Eμ eſt à Fν comme E I à I F, c'eſt-à-dire, comme E H à H F par la conſtruction, ou comme le triangle E Y H au triangle H Y F : Donc le triangle A E Y ſera au triangle B F Y, comme le triangle E Y H à H Y F ; & en permutant A E Y ſera à E Y H comme B F Y à H Y F. Mais les deux triangles A E Y, E Y H ayant une baſe commune E Y, ſont entr'eux comme les lignes A V & V H ; & les

deux B F Y, H Y F ayant la baſe commune F Y, ſont entr'eux, par la même raiſon, comme les lignes B X & X H; il s'enſuit que A V eſt à V H comme B X eſt à X H; mais celles-ci ſont égales par la conſtruction : Donc A V ſera auſſi égale à V H.

Et partant la ligne E Y coupant A H en deux également en V; & la ligne F Y coupant de même B H en X; auſſi-bien que G Y la ligne A B en Z : il s'enſuit que les trois lignes E Y, F Y, & G Y ſont diamétres d'une Ellipſe, dont le centre eſt Y, & qui touchera les trois lignes A C, B D & E F en A, B & H.

Il faut maintenant montrer que H T & ιβ en ſont les diamétres de même conjugaiſon; & pour cet effet il faut des points E & F mener ſur la ligne N M prolongée les lignes E ι & F R paralleles à H T, laquelle il faut continuer de part & d'autre, en ſorte qu'elle rencontre A C en χ, & B D en ζ; puis du point F mener F L parallele à B H, rencontrant T H en L; & par le point X tirer L X, qui rencontre B D en O, & mener Y O. En la même maniere du point E il faut mener E 5 parallele à A H, qui rencontre T H en 5; d'où par le point V il faut tirer 5 V, rencontrant A C en 3, & mener Y 3.

Maintenant, parce que H X eſt égale à X B, la ligne L F aura même raiſon à l'une & à l'autre; mais comme L F eſt à H X, ainſi (dans le triangle L Y F) la ligne L Y eſt à Y H; & comme L F eſt à X B, ainſi (dans le triangle L O F) la ligne L O eſt à O X : Donc L Y eſt à Y H comme L O à O X; & par converſion de raiſon L Y eſt à L H comme L O à L X; & partant dans le triangle L Y O, la baſe Y O eſt parallele à H X, c'eſt-à-dire, à L F; & les triangles Y X O, L X F ſont ſemblables, auſſi-bien que Y ζ O, L ζ F : & par conſequent Y O eſt à L F comme Y X à X F, c'eſt-à-dire, Y H à H L : & Y O à L F comme Y ζ à ζ L : Donc Y H eſt à H L comme Y ζ eſt à ζ L; & en permutant Y ζ eſt à Y H comme ζ L à H L : Mais comme Y ζ eſt à Y H, ainſi ζ M eſt

à M F, & comme ζ L à L H, ainſi ζ F à F B : Donc ζ M eſt à M F comme ζ F à F B, & en permutant & par converſion de raiſon ζ M eſt à M F comme M F à M B. Mais comme ζ M eſt à M F, ainſi ζ Y eſt à F R ou à ſon égale H Y ; & comme F M à M B, ainſi F R eſt à B P, c'eſt-à-dire, H Y à S Y : Donc ζ Y eſt à H Y comme H Y à S Y : Et partant H Y ſera moyenne Géometrique entre les deux ζ Y & S Y : Mais Y T eſt égale à Y H : Donc la toute T ζ ſera diviſée Harmoniquement aux deux points H & S, & la ligne ζ S ſera moyenne Harmonique entre les extrêmes T ζ & H ζ ; & la ligne ζ Y ſera moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par le même raiſonnement nous démontrerons que A V étant égale à V H, la ligne E 5 aura même raiſon à l'une & à l'autre ; mais E 5 eſt à H V, dans le triangle E Y 5, comme E Y à Y V ; & E 5 à A V, dans le triangle E 3 5, comme E 3 à 3 A ; E Y ſera à Y V comme E 3 à 3 A ; & par converſion de raiſon E 3 étant à E A comme E Y à E V, dans le triangle E Y 3, la baſe Y 3 ſera parallele à A V, c'eſt-à-dire, E 5. Et partant les triangles 3 χ Y, E χ 5 ſont ſemblables, auſſi-bien que 3 V Y, E V 5. Et par conſéquent 3 Y ſera à E 5 comme χ Y à χ 5 ; & 3 Y à E 5 comme Y V à V E, c'eſt-à-dire, comme Y H à H 5 : Donc χ Y ſera à χ 5 comme Y H à H 5, & en permutant χ Y ſera à Y H, comme χ 5 à H 5. Or eſt-il que comme χ Y eſt à Y H, ainſi χ N eſt à N E, & comme χ 5 à H 5, ainſi χ E eſt à E A ; Donc χ N eſt à N E comme χ E eſt à E A : & en permutant, changeant, diviſant & changeant χ N ſera à N E comme N E à A N. Mais comme χ N eſt à N E, ainſi χ Y eſt à Y H ou ſon égale Y T, & comme N E eſt à A N, ainſi H Y ou Y T eſt à Y ψ ; Et partant χ Y eſt à T Y comme T Y eſt à Y ψ, & T Y eſt moyenne Géométrique entre les deux χ Y & Y ψ. Mais Y H eſt égale à Y T ; donc la toute H χ eſt diviſée Harmoniquement aux deux points ψ & T ; & la ligne χ ψ eſt moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes H χ & χ T ; & la ligne χ Y ſera la moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, puiſque la ligne H Y ou T Y eſt moyenne proportionnelle Géometrique tant entre les deux ζY & Y S, qu'entre les deux χ Y & Y ψ, les rectangles ζY S & χ Y ψ ſeront égaux entr'eux, & au quarré H Y : & ils auront l'un & l'autre même raiſon au quarré Y ε ou Yβ. Mais le rectangle χ Y ψ eſt au quarré Y ε, ou à ſon égal le rectangle N Y ♪, en raiſon compoſée des lignes χ Y, N Y, c'eſt-à-dire, A ♪ à N ♪, & de Y ψ ou A ♪ à Y ♪. Donc le quarré T Y ſera au quarré Y ε en raiſon compoſée des lignes A ♪ à N ♪, & A ♪ à Y ♪, c'eſt-à-dire, comme le quarré A ♪ au rectangle N ♪ Y: Mais le rectangle N ♪ Y eſt égal au rectangle ε ♪ β (comme nous le démontrerons cy-deſſous;) Et partant le quarré A ♪ ſera au rectangle ε ♪ β, comme le quarré T Y, c'eſt-à-dire, le rectangle T Y H, eſt au quarré ε Y, c'eſt-à-dire, au rectangle ε Y β. Mais la ligne A ♪ eſt parallele au diametre T H, & partant ordonnée au diametre εβ; Donc le point A ſera dans l'Ellipſe, dont T H & εβ ſont diametres de même conjugaiſon.

Par le même diſcours nous dirons que le rectangle ζY S étant au rectangle M Y P en raiſon compoſée des lignes ζY à Y M, c'eſt-à-dire, B P à P M, & de S Y ou B P à Y P; Et le rectangle M Y P étant égal au quarré Y β (comme nous le démontrerons cy-deſſous;) le rectangle ζY S, c'eſt-à-dire, le quarré H Y ſera au rectangle M Y P, c'eſt-à-dire, au quarré Y β, en raiſon compoſée des lignes B P à P M, & B P à Y P, c'eſt-à-dire, comme le quarré B P eſt au rectangle M P Y : Mais le rectangle M P Y eſt égal au rectangle ε P β (ainſi que nous le démontrerons ci-deſſous;) Et par conſéquent le quarré B P ſera au rectangle ε P β comme le quarré H Y, c'eſt-à-dire, le rectangle H Y T eſt au quarré Y β, c'eſt-à-dire, au rectangle ε Y ε. Mais il a été démontré ci-deſſus, que le quarré A ♪ étoit au rectangle ε ♪ β, comme le même rectangle H Y T, eſt au rectangle ε Y β; Et partant le quarré A ♪ ſera au rectangle ε ♪ β, comme le quarré B P au rectangle ε P β. Et parce que B P eſt parallele

parallele à A ♪, c'eſt-à-dire, au diamétre T H, elle ſera ordonnée au diamétre ♪ β; Et par conſéquent le point B ſera auſſi dans l'Ellipſe, dont les lignes T H & ♪ β ſont diamétres de même conjugaiſon.

Je dis de plus, que les lignes A C, B D & E F toucheront la même Ellipſe aux points A, B & H; ce qui ſe démontre en cette maniere. D'autant que la ligne E H eſt tirée au ſommet du diametre T H parallele à l'autre diametre ♪ β, elle touchera l'Ellipſe en H par la 6 du 2. des Coniques d'Apollonius. De plus, la ligne A ψ étant tirée du point A dans l'Ellipſe, & parallele au diametre ♪ β, & coupant l'autre diametre T H au point ψ, de telle ſorte que la ligne χ ψ eſt moyenne Harmonique entre les deux H χ & χ T; la ligne A C χ touchera l'Ellipſe ſuſdite au point A par la 34. du 1. des Coniques. Et par la même propoſition la ligne D B ζ la touchera en B, d'où la ligne B S eſt tirée parallele à ♪ β, & de telle ſorte, que ζ S eſt moyenne Harmonique entre les deux T ζ & ζ H.

Nous avons donc trouvé le point Y & les deux lignes H T & ♪ β pour centre, & diametres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, qui touchera les trois lignes A C, B D, & E F, aux points A, B & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant faire voir, ainſi que nous l'avons promis ci-deſſus, que les rectangles N ♪ Y & ♪ ♪ β ſont égaux, auſſi bien que les rectangles M P Y & β P ε; & que le rectangle M Y P eſt égal au quarré Y β ou Y ε; ce que je fais premierement pour les rectangles N ♪ Y, ♪ ♪ β en cette maniere D'autant que le rectangle N Y ♪ eſt égal par la conſtruction au quarré ε Y, ſi l'on ôte de l'un & de l'autre le même quarré ♪ Y, le rectangle N ♪ Y reſtera d'une part, & le rectangle ♪ ♪ β de l'autre, qui ſeront par conſéquent égaux.

Pour la démonſtration du reſte, il faut mener la ligne V X, & la continüer de part & d'autre, juſqu'a ce qu'elle rencontre la ligne E I au point 9, & la ligne M N prolon-

gée au point 8. Il faut de plus continüer les lignes H B & H A qui rencontrent la même M N prolongée en 7 & 6, & faire I ϕ égale a I F, puis raiſonner en cette ſorte. D'autant que A V eſt égal a V H & B X a X H; la ligne A H ſera a V H comme B H a X H; & partant V X ſera parallele a A B; & I H ſera a H 9, comme B H a H X. Mais B H eſt double de H X, donc I H ſera auſſi double de H 9. Derechef E H étant a H F comme E I a I F, en compoſant, permutant, & changeant E ϕ ſera a E F comme I F eſt a H F. De plus, E H étant a H F comme E I a I F, en permutant & changeant E I ſera a E H comme I F a H F; Et partant E I eſt à E H comme E ϕ a E F, & par converſion de raiſon E I ſera a I H comme E ϕ a F ϕ, & en diviſant E H a I H comme E F a ϕ F; Et partant E H a la moitié de I H, c'eſt-a-dire, H 9, comme E F a la moitié de ϕ F; c'eſt-a-dire, I F, & en compoſant E 9 a H 9 comme E I a I F. Mais comme E I eſt a I F, ainſi E H a H F; Donc E 9 ſera a H 9 comme E H eſt a H F, & en permutant, & par converſion de raiſon, E 9 ſera a H 9 comme H 9 a F 9.

Or parce que dans les triangles ſemblables E V 9, Y V 8 comme E 9 eſt a H 9, ainſi Y 8 eſt a 8 6, & dans les triangles ſemblables a H X 9, 7 X 8, comme H 9 eſt a F 9, ainſi 7 8 eſt a Y 8; il s'enſuit que la ligne 7 8 eſt a Y 8 comme Y 8 a 8 6, & en la même raiſon que E 9 a H 9; Mais comme 7 8 eſt a Y 8, ainſi 7 Y eſt a Y 6, & comme E 9 a H 9, ainſi E H ou ſon égale 2 Y eſt a H F, ou ſon égale Y R; il s'enſuit donc que 7 Y eſt a Y 6 comme 2 Y eſt a Y R, & partant que le rectangle des extrêmes 7 Y R eſt égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

Maintenant, parce que ζ Y eſt a H Y comme H Y eſt a S Y, par converſion de raiſon ζ Y ſera a ζ H comme Y H a H S; Mais comme ζ Y eſt a ζ H, ainſi M Y eſt a H F ou a ſon égale Y R; & comme Y H eſt à H S, ainſi 7 Y eſt à B S ou à ſon égale Y P; Donc M Y ſera à Y R comme 7 Y à Y P; & partant le rectangle des extrêmes M Y P eſt égal au rectangle des moyennes 7 Y R.

De plus, parce que ϰ Y eſt à H Y comme H Y à Y ♄, & que ϰ Y eſt à H Y comme ϰ N eſt à N E, & Y N à N 2; il s'enſuit que Y N eſt à N 2 comme H Y eſt à Y ♄, & Y N à Y 2 comme H Y à H ♄. Mais H Y eſt à H ♄ comme 6 Y eſt à A ♄, ou à ſon égale ♪ Y; Donc Y N ſera à Y 2 comme 6 Y eſt à ♪ Y, & le rectangle des extrêmes N Y ♪ ſera égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

Et par conſéquent le rectangle M Y P ſera au rectangle 7 Y R comme le rectangle N Y ♪ au rectangle 6 Y 2, & en permutant M Y P ſera à N Y ♪ comme 7 Y R à 6 Y 2. Mais il a été démontré ci-deſſus que les rectangles 7 Y R & 6 Y 2 ſont égaux; Partant les rectangles M Y P & N Y ♪ ſeront auſſi égaux. Mais le quarré ♯ Y, ou ſon égal ♭ Y eſt égal au rectangle N Y ♪ par la conſtruction; il ſera donc auſſi égal au rectangle M Y P.

Et ſi l'on ôte de l'un & de l'autre le commun quarré de Y P, il reſtera le rectangle M P Y égal au rectangle ♯ P ♭. Qui eſt tout ce que nous devions démontrer.

Le cercle pourroit auſſi ſervir à la ſolution de ce Problême, ſi les deux lignes A G & B G étant égales auſſi-bien que les trois A Y, B Y, & H Y, celles-ci ſe trouvoient auſſi perpendiculaires aux lignes A C, B D, & E F, chacune à la ſienne.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Enfin, ſi les pieds droits A C & B D ne ſont point paralleles, mais en ſurplomb (comme à la 2. Figure de la 6. Planche, & aux Figures de la 7. Planche) en ſorte qu'étant prolongez, ils ſe rencontrent au-deſſus, comme en G de la part de A & B; & ſi la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire, n'eſt point parallele à la rampe A B, mais que l'une & l'autre étant prolongées, ſe rencontrent, comme en I. *Fig. II. de la VI. Planche. Fig. I. & II. de la VII. Planche.*

Il y a en cette propoſition trois Cas à conſiderer, chacun deſquels demande une ſection Conique particuliere

pour ſa ſolution ; car ou la raiſon de la ligne E I à I F ſera la même que celle de G F à F B, ou elle ſera moindre, ou elle ſera plus grande. Au premier Cas (comme en la 2. Figure) il faut une Parabole. Au ſecond Cas (comme en la 3. Figure) il faut une Ellipſe. Au troiſiéme Cas (comme en la 4. Figure) il faut une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du neuviéme Problème.

Figure 1. de la VII. Planche. Soit (comme en la 1. Figure de la 7. Planche) la ligne E I à la ligne I F, comme la ligne G F à F B ; & après avoir coupé A B en deux également en Z, & mené G Z, qui diviſe E F en P, il faut du point F prendre F H égale à E P.

Je dis que la ſection qui touchera les deux lignes A C, B D aux points A & B, & la ligne E F, ſera une Parabole ; & que le point H ſera celui où elle touchera la ligne E F ; en ſorte que ſi nous coupons la ligne G Z en deux également en O, & qu'aux deux lignes O Z & A Z nous faſſions une troiſiéme proportionnelle Géometrique O R, que nous ménions du point O parallele à A B, la ligne O Z en ſera le diametre ſous l'angle G Z A, & O R ſera ſon paramétre ou diamétre contigu. Pour la démonſtration, il faut mener les lignes E L, H K, & F M paralleles à G Z, puis tirer les lignes A H Q & B H, qui rencontrent les lignes E L & M F prolongées en V, X, & Q, & mener V X & F K.

D'autant que H F eſt égale à E P, & que E L, H K, & F M ſont paralleles à G Z, les deux lignes L Z & K M ſeront auſſi égales ; & par conſéquent les deux L K & Z M, auſſi-bien que les deux E H & P F. Et parce que E I eſt à I F, ainſi que G F à F B ; & que comme E I eſt à I F, ainſi (dans le triangle E I L) E L eſt à F M ; & que comme G F à F B, ainſi (dans le triangle G B Z) la ligne Z M à M B : Il s'enſuit que E L ſera à F M, comme Z M à M B. Mais la raiſon de E L à F M eſt compoſée des raiſons de E L à A L, (c'eſt-

à-dire, GZ à AZ) AL à MB, & MB à FM (c'eſt-à-dire, BZ ou ſon égale AZ à GZ:) Donc la raiſon de ZM à MB ſera auſſi égale à la compoſée des raiſons de GZ à AZ, AL à MB, & AZ à GZ; c'eſt-à-dire (parce que les deux raiſons de GZ à AZ, & AZ à GZ ſe détruiſent) égale à la raiſon de AL à MB: Et par conſéquent la ligne AL ſera égale à ZM, c'eſt-à-dire, à LK; mais comme AL eſt à LK, ainſi AV eſt à VH: Donc AV ſera auſſi égale à VH.

Maintenant, puiſque AL eſt égale à LK, & LZ à KM; AZ ou BZ ſera égale à LM; & ôtant le commun ZM, les deux ZL & MB ſeront égales; mais ZL eſt égale à KM: Donc les deux MB & KM ſeront auſſi égales: Et partant dans le triangle HBK la ligne HX ſera égale à XB, & HS à SK; & les deux triangles HKA, QXV ſeront ſemblables; & HK ſera à AK, comme QX à VX; & en permutant HK ſera à QX comme AK à VX, ou à ſon égale LM. Ce qu'il faut remarquer.

De plus, GF étant à FB comme ZM à MB, c'eſt-à-dire, comme LK à KM, ou comme EH à HF; & EI étant à IF comme GF à FB, il s'enſuit que EH eſt à HF comme EI à IF: Et partant la ligne IH eſt moyenne Harmonique entre les deux EI & IF.

Davantage, comme GF eſt à FB, ainſi ZM à MB, c'eſt-à-dire, LK à KM; ou prenant leurs doubles, comme AK à KB, il s'enſuit que AK eſt à KB, comme GF à FB; & partant que la ligne FK eſt parallele à AE; & par conſéquent les triangles GPE, KHF ſeront ſemblables, & leurs baſes PE, HF étant égales, les côtez GP & HK ſeront égaux, auſſi-bien que EG & FK; & AE ſera à EG, comme à KF, c'eſt-à-dire, comme EI à IF, ou GF à FB, ou EH à HF.

Voilà donc trois lignes AG, BG, & EF, diviſées en raiſons égales aux points E F, & H: elles ſeront donc par la 41. du 3. des Coniques d'Apollonius, trois contingentes aux points A, B, & H, d'une même Parabole.

Or pour faire voir que la Parabole, dont les diamétres ſont O Z & O R, eſt celle que ces trois lignes touchent aux trois points ſuſdits, je raiſonne en cette ſorte. La ligne O R étant troiſiéme proportionnelle Géometrique aux deux O Z & A Z, le rectangle Z O R ſera égal au quarré A Z ou B Z; & partant les deux points A & B ſeront dans la Parabole.

Mais pour montrer que le point H y eſt auſſi, je fais ainſi. La ligne F K étant parallele à A E dans le triangle A I E, A I ſera à I K, comme E I à I F, c'eſt-à-dire, dans le triangle E I L, comme L I a I M; & en diviſant & permutant A K ſera a L M, comme K I a I M, c'eſt-a-dire, (dans le triangle H I K) comme K H eſt a F M. Mais nous avons fait remarquer ci-deſſus que H K étoit a Q X, comme la même A K a L M: Donc la ligne H K aura même raiſon aux deux lignes Q X & F M; & partant elles ſeront égales: & ôtant F X commun, les reſtes Q F & X M, ou V L, ſeront égaux; & par conſéquent E V aura même raiſon a Q F & a V L. Mais E V eſt a Q F, comme E H eſt a H F, ou L K a K M, ou A L a L Z: Donc E V ſera a V L, comme A L a L Z; & en changeant & compoſant V L ſera a E L, comme L Z a A Z, ou comme le rectangle Z L A au rectangle Z A L (en prenant A L pour commune hauteur.) Mais E L eſt a G Z, comme A L a A Z, c'eſt-a-dire, (en prenant A Z pour commune hauteur) comme le rectangle Z A L au quarré A Z: Donc par égalité V L ſera a G Z, comme le rectangle Z L A, ou ſon egal L K M, au quarré A Z ou B Z; & le double de V L, c'eſt-a-dire, H K a G Z, comme le double du rectangle L K M, c'eſt-a-dire, L K B au quarrè B Z; & H K a la moitié de G Z, c'eſt-a-dire O Z, comme le double du rectangle L K B, c'eſt-a-dire, le rectangle A K B au quarré B Z. Mais H K eſt parallele au diamétre O Z: Donc le point H ſera dans la Parabole, dont les diamétres ſont O Z & O R.

Il eſt notoire que le ſommet étant O, où G Z eſt diviſée

en deux également, les deux lignes A G & B G toucheront la même Parabole en A & B. Et pour démontrer qu'elle touchera auſſi E F en H, je raiſonne en cette maniere, après avoir tiré la ligne H N parallele a A B, laquelle ſera par conſéquent ordonnée au diamétre O Z. Parce que F K eſt parallele a A E, E I eſt a I F comme A I a I K, & comme E H a H F, c'eſt-a-dire, L K ou Z M a K M; A I ſera donc a I K comme Z M a K M: & en diviſant A K a I K comme K Z a K M: Et partant le rectangle des moyennes I K Z ſera égal au rectangle des extrêmes A K M; & deux fois le rectangle I K Z égal au rectangle A K B; & ajoûtant le quarré Z K, deux rectangles I K Z avec le quarré Z K, (c'eſt-a-dire, le rectangle I K Z avec le rectangle I Z K) égaux au rectangle A K B avec le quarré Z K, (c'eſt-a-dire, au quarré B Z:) Et partant le rectangle I K Z ſera égal au quarré B Z, moins le rectangle I Z K; & le rectangle I Z K aura même raiſon au rectangle I K Z qu'au quarré B Z, moins le rectangle I Z K. Mais le rectangle I Z K eſt au rectangle I K Z comme I Z a I K, c'eſt-a-dire, comme P Z a H K: Donc le rectangle I Z K ſera au quarré B Z, moins le rectangle I Z K, comme P Z eſt a H K. Mais il a été démontré ci-deſſus, que P G étoit égale a H K; donc P Z ſera a P G comme le rectangle I Z K eſt au quarré B Z, moins le rectangle I Z K; & en changeant & compoſant G Z ſera a P Z, comme le quarré B Z au rectangle I Z K. Mais P Z eſt a P N, comme I Z a H N ou Z K, c'eſt-a-dire, comme le rectangle I Z K au quarré K Z, ou H N: Donc par égalité G Z ſera a P N, comme le quarré B Z eſt au quarré N H. Mais parce que N H eſt parallele a A B, & ordonnée a G Z, le quarré B Z eſt au quarré N H comme la ligne Z O a O N; il s'enſuit que G Z ſera a P N comme Z O a O N; & en permutant G Z a Z O, comme P N a N O; mais G Z eſt double de O Z: donc P N ſera auſſi double de N O; & par conſéquent la ligne E F touchera la Parabole ſuſdite au point H. Ce qu'il falloit démontrer.

Second cas du neuviéme Problème.

Fig. II. de la VI. Planche. Si les pieds droits A C & B D étans en ſurplomb, ſe rencontrent de la part de A & B au point G, (comme en la 2. Fig. de la 6. Planche,) & que la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire étant prolongée, rencontre auſſi la ligne de la rampe A B, comme en I, en telle ſorte que la raiſon de la ligne E I à I F ſoit moindre que celle de la ligne G F à F B.

Après avoir diviſé la ligne A B en deux également en Z, & mené indéfiniment la ligne G Z, il faut trouver I H moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux E I & I F; & après avoir mené les lignes H B & H A, il en faut diviſer l'une comme H B en deux également en X, & mener F X, qui rencontrera G Z continuée de la part de Z, comme en Y, ainſi qu'il ſe verra ci-deſſous, d'où il faut mener la ligne E Y.

Je dis que la ſection qui touchera les deux lignes A C & B D en A & B, & la ligne E F, ſera une Ellipſe, dont Y ſera le centre, & le point H celui où elle touchera la ligne E F. Et que ſi l'on méne indéfiniment la ligne H Y ſur laquelle on prenne Y T égale à Y H, & qu'après avoir tiré la ligne N Y M par le point Y parallele à E F, ſur laquelle des points A & B tombent les lignes A ϑ & B P paralleles à H Y, l'on prenne ε Y moyenne proportionnelle Géometrique entre les deux N Y & Y ϑ, & que l'on faſſe Y ϛ égale a Y ε; les deux droites H T, & ε ϛ ſeront les diamétres de même conjugaiſon de la ſuſdite Ellipſe.

Pour la démonſtration, il faut premierement mener des points E, H, & F ſur la ligne A B, les lignes E μ, H φ & F η paralleles a G Z, & raiſonner en cette maniere. La ligne E μ eſt a F η en raiſon compoſée des raiſons de E μ a A μ, (c'eſt-a-dire, G Z a A Z) A μ a B η, & B η a F η (c'eſt-a-dire, B Z ou A Z a G Z:) Mais les raiſons de G Z a A Z, & A Z a G Z ſe détruiſent, & par conſéquent E μ ſera à F η,

F ν, comme A μ a B ν. De plus, parce que la ligne H I eſt moyenne Harmonique entre les deux E I & I F, comme E I eſt a I F, ainſi E H eſt a H F, c'eſt-a-dire, μφ a φν, & comme E I a I F; ainſi E μ a F ν, c'eſt-a-dire, A μ a B ν; donc μφ eſt a φν, comme A μ a B ν; & en compoſant A φ a φ B, comme A μ a B ν, c'eſt-a-dire, comme E I a I F. Mais la raiſon de E I a I F eſt par l'hypotheſe moindre que celle de G F a F B, c'eſt-a-dire, Z ν a B ν: Donc la raiſon de A φ a φ B ſera moindre que celle de Z ν a B ν, & en compoſant & permutant la raiſon A B a Z B moindre que celle de φ B a B ν; mais A B eſt double de Z B: Donc φ B ſera plus grande que le double de B ν, & partant φν plus grande que B ν; & dans le triangle H φ B, la ligne H τ ſera plus grande que B τ; mais B X eſt égale a H X: donc la ligne B X ſera plus grande que la même B τ, & l'angle B F X plus grand que l'angle B F τ, c'eſt-a-dire, B G Z; Et partant la ligne F X étant continuée, rencontrera la ligne G Z continuée de la part de Z comme au point Y.

Maintenant, après avoir mené par le point Y la ligne K Y Q parallele a A B, & tiré du même point les deux lignes Y ν & Y λ perpendiculaires aux deux B D, A C, je dis que la ligne K Q étant parallele a A B, elle ſera diviſée en Y comme A B l'eſt en Z; c'eſt-a-dire, en deux également: Et partant les deux triangles G Y K, G Y Q ſeront égaux; & par conſéquent ils auront leurs côtez en raiſon réciproque de leurs hauteurs, c'eſt-a-dire, que le côté K G du triangle G K Y ſera au côté Q G du triangle G Q Y, comme la ligne Y ν hauteur du triangle G Q Y a la ligne Y λ hauteur du triangle G K Y: Mais comme K G eſt a Q G, ainſi A G eſt a B G: Donc A G ſera a B G comme Y ν a Y λ.

De plus, après avoir mené les deux lignes A Y & B Y, d'autant que les deux triangles A Y E, B Y F ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs côtez & de leurs hauteurs, la raiſon du triangle A Y E au triangle B Y F ſera compo-

ſée des raiſons des lignes AE à BF, & Yλ à Yν, c'eſt-à dire, BG à AG. Mais la raiſon de AE à BF eſt encore compoſée de celle des lignes AE à Eμ (c'eſt-à-dire, AG à GZ) Eμ à Fν, & Fν à BF, (c'eſt-à-dire, GZ à GB;) la raiſon donc du triangle AYE au triangle BYF ſera compoſée des raiſons de AG à GZ, Eμ à Fν, GZ à GB, & GB à AG; mais les raiſons de AG à GZ, GZ à GB, & GB à AG ſe détruiſent. Il ne reſte donc plus que la raiſon de Eμ à Fν qui ſoit égale à celle du triangle AYE au triangle BYF. Mais comme Eμ eſt à Fν, ainſi EI à IF, ou EH à HF, ou le triangle EYH au triangle FYH: Donc le triangle AYE ſera au triangle BYF, comme le triangle EYH à HYF; & en permutant, le triangle AYE au triangle EYH, comme le triangle BYF au triangle HYF. Mais les deux triangles AYE, EYH ayant une baſe commune EY, ſont entr'eux comme les lignes AV & VH; & les deux triangles BYF, HYF ayant une baſe commune FY, ſont auſſi comme BX à XH; il s'enſuit que AV eſt à VH comme BX à XH. Mais BX eſt égale à XH par la conſtruction: Donc AV ſera auſſi égale à VH.

Voilà donc trois lignes AB, AH, & BH qui ſont diviſées également en deux aux points Z, V, & X, par les lignes GZ, EV, & FX, qui partent des points G, E, & F, où les lignes AC, BD, & EF ſe rencontrent, & qui ſe joignent toutes en un même point Y, au-deſſous du point G vers Z. Et partant ce point Y ſera le centre d'une Ellipſe, qui touchera les trois lignes ſuſdites AC, BD, & EF, aux points A, B, & H.

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes HYT, ιYϛ en ſont les diamétres de même conjugaiſon. Et pour cet effet, il faut continuer la ligne HYT de part & d'autre, juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AC prolongée en χ, & BD en ζ; puis du point E mener la ligne E5 parallele à AH, & qui coupe la ligne HY prolongée en 5, d'où par le point V il en faut mener une autre 5V3 qui coupe

la ligne A C en 3, & joindre les points Y & 3. Semblablement du point F il faut mener F L parallele à B H, & qui coupe la même Y H prolongée en L, d'où par le point X il faut tirer une ligne L X O, qui rencontre B D prolongée en O, & joindre les points Y & O, & enfin tirer les lignes A ♃ & B S paralleles à E F, & continuer M N de part & d'autre, afin qu'elle coupe les lignes H B, H A prolongées aux points 7 & 6, & tirer la ligne V X indéfiniment de part & d'autre, afin qu'elle coupe E I au point 9 & M N au point 8.

Cela fait, je raiſonne en cette maniere. D'autant que L F eſt parallele à B H, & B X eſt égale à H X, la ligne L F ſera à H X, c'eſt-à-dire, L Y à Y H, comme la même L F à B X, c'eſt-à-dire, comme L O à O X; & par converſion de raiſon L Y ſera à L H comme L O à L X; & partant dans le triangle L Y O, la baſe O Y ſera parallele à la ligne H X ou L F: Donc au triangle Y ☾ O, la ligne Y O ſera à L F comme ☾ Y à ☾ L; & aux triangles ſemblables Y X O, L X F, la même Y O ſera à la même L F comme Y X à X F, ou comme Y H à H L: Et partant ☾ Y ſera à ☾ L comme Y H à H L; & en permutant, ☾ Y à H Y comme ☾ L à H L, Mais ☾ Y eſt à H Y comme ☾ M à M F, & ☾ L à H L comme ☾ F à F B: Donc ☾ M eſt à M F comme ☾ F à F B; & en permutant, & par converſion de raiſon ☾ M eſt à M F comme M F à M B. Mais comme ☾ M eſt à M F, ainſi ☾ Y eſt à H Y, & M F eſt à M B, ainſi H Y à Y S: Donc ☾ Y eſt à H Y comme H Y à Y S, c'eſt-à-dire, que H Y eſt moyenne Géometrique entre les deux ☾ Y & Y S: Mais la ligne Y T eſt égale à Y H par la conſtruction; & partant la toute ☾ T eſt diviſée Harmoniquement aux points H & S, & la ligne ☾ S eſt moyenne Harmonique entre les deux ☾ T ☾ H, & la ligne ☾ Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raiſonnement, & par le moyen de la ligne E 5 nous démontrerons que la ligne H Y eſt auſſi moyenne Géometrique entre les deux ☿ Y & Y ♃: & que la toute

T χ eſt auſſi diviſée Harmoniquement aux points H & ψ, en ſorte que la ligne χ ψ eſt moyenne Harmonique entre les deux T χ & H χ, & la ligne χ Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles χ Y ψ & ζ Y S étant chacun égal au quarré H Y, ils ſeront auſſi égaux entre eux, & ils auront l'un & l'autre même raiſon au quarré ε Y, ou ſon égal Y ϛ. Mais la raiſon du rectangle χ Y ψ au quarré ε Y, ou ſon égal N Y ϑ, eſt compoſée des raiſons des lignes χ Y à N Y (c'eſt-à-dire, A ϑ a N ϑ) & de Y ψ, ou ſon égale A ϑ a Y ϑ, leſquelles font enſemble la raiſon du quarré A ϑ au rectangle N ϑ Y: Donc le rectangle χ Y ψ, ou le quarré H Y ſera au quarré ε Y, comme le quarré A ϑ au rectangle N ϑ Y: Or eſt-il que le rectangle N ϑ Y eſt égal au rectangle ε ϑ ϛ, comme il a été tant de fois démontré ci-deſſus: Et partant le quarré A ϑ ſera au rectangle ε ϑ ϛ, comme le quarré H Y au quarré ε Y, ou prenant leurs quadruples, comme le quarré du diamétre H T au quarré du diamétre ε ϛ. Mais la ligne A ϑ étant paralléle au diamétre H Y, eſt ordonnée a l'autre diamétre ε ϛ: Donc le point A ſera dans l'Ellipſe, dont les deux lignes H T, & ε β ſont les diamétres de même conjugaiſon.

Il eſt notoire que le point H étant au bout d'un deſdits diamétres, il eſt auſſi dans la même Ellipſe. Mais pour prouver que le point B s'y trouve pareillement, il faut diſcourir en cette maniere. Le rectangle ζ Y S eſt au rectangle M Y P en raiſon compoſée des raiſons de ζ Y a Y M, c'eſt-a-dire, B P a P M, & de Y S, ou ſon égale B P a Y P, leſquelles compoſent la raiſon du quarré B P au rectangle M P Y: Et partant le rectangle ζ Y S, ou ſon égal le quarré H Y ſera au rectangle M Y P, ou ſon égal le quarré Y ϛ, ou Y ε (comme nous le démontrerons ci-deſſous) comme le quarré B P eſt au rectangle M P Y, ou a ſon égal ϛ P ε, (comme nous le démontrerons auſſi ci-deſſous,) c'eſt-a-dire, que le quarré B P ſera au rectangle ϛ P ε comme le

quarré H Y au quarré Y ♀ ; ou prenant leurs quadruples, comme le quarré T H au quarré ♀ ♂ : Mais P B étant parallelle au diametre T H, eſt ordonnée a l'autre diamétre ♀ ♂ ; Et partant le point B eſt dans l'Ellipſe, dont les lignes H T & ♀ ♂ ſont diamétres de même conjugaiſon.

Je dis de plus, que cette Ellipſe touchera les lignes A C, B D, & E F aux mêmes points A, B, & H : ce qui eſt premierement conſtant par la 6. du 2. des Coniques au regard de la ligne E F, qui eſt menée au bout H du diamétre T H parallele a l'autre diamétre ♀ ♂. Mais pour les deux autres, il faut raiſonner en cette ſorte. D'autant que la ligne B S eſt parallele a ♀ ♂, elle ſera ordonnée a T H ; mais elle diviſe la ligne T ♃ de telle ſorte en S, que la ligne ♃ S ſoit moyenne Harmonique entre les deux ♃ T & ♃ H. Il s'enſuit par la 34. du 1. des Coniques, que la ligne B D touchera en B la ſuſdite Ellipſe.

De plus, par la même propoſition, il appert que la ligne A C la touche en A, parce que l'ordonnée A ♄ coupe T ☌ en ♄, de telle ſorte que ☌ ♄ ſoit moyenne Harmonique entre les deux ☌ T & ☌ H.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes H T & ♀ ♂ pour diamétres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, laquelle touche les trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il ne reſte plus qu'a démontrer (comme nous l'avons promis) que le rectangle M Y P eſt égal au quarré Y ♂ ou Y ♀, c'eſt-a dire, au rectangle N Y ♪, & le rectangle M P Y égal au rectangle ♀ P ♂ ; ce qui ſe fait en cette maniere, après avoir fait I ☿ égale a I F. Puiſque A V eſt égale a V H, comme B X égale a X H ; la ligne V X ☽ ſera parallele a A B, & H ☽ égale a I ☽. Et puiſque E H eſt a H F comme E I a I F, en compoſant, & permutant, E ☿ ſera a E F comme I F a H F. Mais comme I F a H F, ainſi E I a E H : Donc E ☿ ſera a E F, comme E I a E H ; & en diviſant, prenant la moitié des antécedens, compoſant, & par converſion

de raiſon, E I ſera à I F, c'eſt à-dire, E H à H F comme E 9 & à H 9; & en permutant, changeant, & par converſion de raiſon E 9 ſera à H 9 comme H 9 à F 9.

Or dans les triangles ſemblables H X 9 & 7 X 8, comme H 9 eſt à F 9, ainſi 7 8 eſt à Y 8: Et dans les triangles ſemblables E V 9, Y V 8, comme E 9 eſt à H 9, ainſi Y 8 eſt à 68: Donc 78 ſera à Y 8 comme Y 8 à 86, & en la même raiſon de E 9 à H 9. Mais comme E 9 à H 9, ainſi E H à H F, c'eſt-à-dire, 2 Y à Y R; & comme 78 à Y 8, ainſi 7 Y à Y 6: Donc 7 Y eſt à Y 6 comme 2 Y eſt à Y R; & le rectangle des extrêmes 7 Y R eſt égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

De plus, parce que ζ Y eſt à H Y comme H Y à S Y, par converſion de raiſon ζ Y ſera à ζ H comme H Y à H S: Mais comme ζ Y eſt à ζ H, ainſi M Y eſt à H F, ou Y R; & comme H Y à H S, ainſi 7 Y eſt à B S ou Y P: Donc M Y ſera à Y R comme 7 Y à Y P; & le rectangle des moyennes 7 Y R eſt égal à celui des extrêmes M Y P.

Par le même raiſonnement nous ferons voir que le rectangle 6 Y 2 eſt égal au rectangle N Y ♪. Et partant le rectangle 7 Y R eſt au rectangle M Y P comme 6 Y 2 à N Y ♪; & en permutant 7 Y R étant égal à 6 Y 2, le rectangle M Y P ſera auſſi égal au rectangle N Y ♪, c'eſt-à-dire, par la conſtruction, au quarré ∗ Y ou β Y. Et partant ſi de l'un & de l'autre on ôte le commun quarré Y P, le rectangle M P Y demeurera égal au rectangle ∗ P ϵ. Qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

Le cercle pourroit réſoudre ce cas de ce Problême, ainſi que nous avons dit ci-deſſus du 8ᵉ, ſi les deux lignes A G & B G ſe trouvant égales auſſi-bien que les trois A Y, B Y, & H Y; ces trois lignes ſe trouvoient encore perpendiculaires aux trois A C, B D, & E F, chacune à la ſienne.

Troiſiéme Cas du neuviéme Problême.

Enfin, ſi les pieds droits A C & B D étant en ſurplomb,

ſe rencontrent, étant prolongez de la part de A & B, au point G (comme en la 2. Figure de la 7. Planche) & que la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, rencontre auſſi la ligne de la rampe A B, comme en I, de telle ſorte que la raiſon de la ligne E I à I F ſoit plus grande que celle de F G à F B. Apres avoir diviſé la ligne A B en deux également en Z, & mené la ligne G Z indéfiniment de la part de G; il faut trouver I H moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux E I & I F; & après avoir mené les lignes H B, H A, il en faut diviſer l'une, comme H B, en deux également en X, & mener F X indéfiniment de la part de F, qui rencontrera G Z au-deſſus du point G comme en Y (ainſi qu'il ſe verra ci-deſſous) d'où il faut mener Y E V. *Fig. II. de la VII. Planche.*

Je dis que la ſection qui touchera les deux lignes A C & B D aux points A & B, & la ligne E F; ſera une Hyperbole, dont le centre ſera au point Y; & le point H celui où elle touchera la ligne E F; & que ſi l'on méne indéfiniment la ligne H Y, ſur laquelle on prenne Y T égale à Y H; & qu'après avoir tiré par le point Y la ligne M N parallele à E F, ſur laquelle des points A & B tombent les lignes A ϑ & B P paralleles à H Y; l'on prenne ϑ Y moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux N Y & Y ϑ, & que l'on faſſe Y ϛ égale à ϑ Y: les deux droites H T & ϑ ϛ ſeront les diamétres de même conjugaiſon de la ſuſdite Hyperbole.

La démonſtration s'en fait en la même maniere, & preſque aux mêmes termes que celle de la précedente propoſition pour l'Ellipſe; & pour ce ſujet, il faut premierement mener des points E, H, & F ſur la ligne A B les lignes E μ, H φ, & F η paralleles à G Z, & argumenter en cette ſorte. La ligne E μ eſt à F η en raiſon compoſée de celles de E μ à A μ, (ou G Z à A Z,) A μ à B η, & B η à F η, (ou B Z, ou A Z à G Z.) Mais la raiſon de G Z à A Z détruit celle de A Z à G Z; & partant la raiſon de E μ à F η ſera égale à celle

de A μ à B η. De plus, parce que I H eſt moyenne Harmonique entre les deux E I & I F ; la ligne E H ſera à H F, ou $\mu\phi$ à $\phi\eta$, comme E I à I F, ou E μ à F η, ou A μ à B η : Donc A μ ſera à B η comme $\mu\phi$ à $\phi\eta$; & la toute A ϕ à la toute ϕ B comme la partie $\mu\phi$ à la partie $\phi\eta$, c'eſt-à-dire, comme E I à I F. Mais la raiſon de E I à I F eſt par l'hypotheſe plus grande qne celle de G F à F B, ou Z η à B η : Donc la raiſon de A ϕ à B ϕ ſera plus grande que celle de Z η à B η ; & en compoſant & permutant, celle de A B à Z B plus grande que celle de ϕ B à B η. Mais A B eſt double de Z B : Donc ϕ B ſera moindre que double de B η ; c'eſt-à-dire, que $\phi\eta$ ſera moindre que η B ; & dans le triangle H ϕ B, H τ ſera moindre que τ B ; & partant τ B plus grande que B X, & l'angle B F τ, ou B G Z plus grand que l'angle B F X, ou G F Y : Et partant la ligne X F rencontrera la ligne Z G continuée au-deſſus de G, comme au point Y.

Maintenant, après avoir mené par le point Y la ligne K Y Q parallele à A B, & tiré du même point les deux lignes Y ν & Y λ perpendiculaires aux deux lignes A C G, & B D G prolongées ; je dis que la ligne K Q étant parallele à A B, elle ſera diviſée en Y en la même raiſon que A B l'eſt en Z, c'eſt-à-dire, en deux également : Et partant les triangles G Y K, G Y Q ſeront égaux ; & ils auront par conſéquent les côtez réciproques de leurs hauteurs, c'eſt-à-dire, que le côté G K du triangle G K Y ſera au côté G Q du triangle G Q Y, comme Y ν hauteur de G Q Y à Y λ hauteur de G K Y ; mais comme K G eſt à G Q, ainſi A G eſt à G B : Donc A G eſt à G B comme Y ν eſt à Y λ.

De plus, après avoir mené les deux lignes A Y & B Y ; d'autant que les deux triangles A Y E, B Y F ſont entr'eux en raiſon compoſée de celles de leurs côtez, & de leurs hauteurs ; le triangle A Y E ſera à B Y F en raiſon compoſée du côté A E au côté B F, & de la hauteur Y λ à la hauteur Y ν, c'eſt-à-dire, de la ligne B G à A G. Mais la raiſon de A E à B F eſt encore compoſée de celles de A E à E μ,

(ou

(ou AG à GZ,) Eμ à Fν, & Fν à FB, (ou GZ à GB:) Donc la raiſon du triangle AEY au triangle BFY ſera compoſée de celles de AG à GZ, Eμ à Fν, GZ à GB, & GB à AG. Mais les raiſons de AG à GZ, GZ à GB, & GB à AG ſe détruiſent: Donc le triangle AEY ſera à BFY comme la ligne Eμ eſt à Fν, ou comme EI à IF, ou EH à HF, ou enfin comme le triangle EYH au triangle FYH; & en permutant le triangle AEY ſera au triangle HEY comme le triangle BFY au triangle FYH. Mais parce que les deux triangles AVY, VHY ſont entr'eux comme AV eſt à VH, auſſi-bien que les deux triangles AEV, EVH, les reſtes, ſçavoir les triangles AEY, EHY ſeront auſſi entr'eux comme AV eſt à VH. Par même raiſon nous montrerons que le triangle BFY eſt au triangle FHY comme BX eſt à XH: Donc AV ſera à VH comme BX eſt à XH; mais celles-ci ſont égales par la conſtruction, & partant AV ſera auſſi égale à VH.

Voilà donc trois lignes AB, AH, & BH, qui ſont diviſées en deux également aux points Z, V, & X par les lignes GZ, EV, FX, qui partant des points G, E, & F, où les lignes AC, BD, & EF ſe rencontrent, ſe joignent toutes au-deſſus de G en un même point Y: Donc le point Y ſera le centre d'une Hyperbole qui touchera les ſuſdites trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H.

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes HT & ιG en ſont les diamétres de même conjugaiſon. Et pour ce ſujet il faut continuer la ligne YH, qui rencontrera AC prolongée au point χ, & BD en ζ; puis du point F mener FL parallele à BH, & qui coupe YH en L, par où du point X il faut mener la ligne XL, & la continuer juſqu'à ce qu'elle coupe BG prolongée en O, & joindre les points Y & O. En la même maniere du point E il faut mener E5 parallele à AH, qui rencontre YH en 5, par où du point V il faut tirer la ligne V5, & la continuer juſqu'à ce qu'elle rencontre AG continuée au point 3, & joindre Y & 3; &

enfin mener A ↓, & B S paralleles à E F ou M N, & continuer M N de part & d'autre juſqu'à ce qu'elle coupe les lignes A H, B H prolongées aux points 6 & 7, & tirer la ligne V X, en ſorte qu'elle coupe E I au point 9, & M N au point 8.

Cela fait, je raiſonne en cette maniere. Parce que H X eſt égale à B X, la ligne L F aura même raiſon à l'une & l'autre; c'eſt-à-dire, qu'au triangle H Y X, la ligne L F ſera à H X comme L Y à Y H; & au triangle X O B, L F ſera à B X comme L O à O X; & partant L Y ſera à Y H comme L O à O X; & en diviſant & permutant, L Y à L O comme L H à L X: Donc les triangles O L Y, H L X ſeront ſemblables, & la baſe O Y parallele à H X ou L F. Et par conſéquent aux triangles ſemblables O ζ Y, L ζ F, la ligne O Y eſt à L F comme Y ζ à ζ L; & dans les triangles ſemblables O X Y, L X F, la même O Y eſt à la même L F comme O X à X L; & partant ζ Y eſt à ζ L comme O X à X L, c'eſt-à-dire, comme Y H à H L; & en permutant, ζ Y eſt à Y H comme ζ L à H L; Mais comme ζ Y à Y H, ainſi ζ M à M F, & comme ζ L à H L, ainſi ζ F à F B: Donc ζ M eſt à M F, comme ζ F à F B; & en permutant, changeant, compoſant, & changeant ζ M ſera à M F, (c'eſt à-dire, ζ Y à Y H,) comme M F à M B, c'eſt-à-dire, Y H à Y S. Voilà donc la ligne Y H moyenne Géometrique entre les deux ζ Y & Y S; mais la ligne Y T a été priſe égale à la même Y H: Donc la toute T S ſera diviſée Harmoniquement aux points H & ζ; & la ligne ζ S ſera moyenne Harmonique entre les deux T S & S H; & S Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raiſonnement, & par le moyen de la ligne E 5 nous démontrerons que la même Y H ſera auſſi moyenne Géométrique entre les deux χ Y & ↓ Y; & que la toute T ↓ eſt diviſée Harmoniquement aux deux points H & χ, & la ligne ↓ χ moyenne Harmonique entre les deux T ↓ & ↓ H; & ↓ Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles χ Y ψ & ζ Y S étant chacun égal au quarré H Y, ils ſeront auſſi égaux entre eux; & le quarré H Y ſera au quarré ϵ Y, ou à ſon égal le rectangle N Y ϑ, comme le rectangle χ Y ψ au même rectangle N Y ϑ. Mais la raiſon du rectangle χ Y ψ au rectangle N Y ϑ eſt compoſée de celles des lignes χ Y à N Y, c'eſt-à-dire, χ ψ à A ψ, & ψ Y à Y ϑ, ou à ſon egale A ψ; qui compoſent la raiſon du rectangle χ Y ψ au quarré A ψ: Donc le quarré Y H ſera au quarré ϵ Y, ou (prenant leurs quadruples,) le quarré du diamétre T H ſera au quarré du diamétre ϵ β, comme le rectangle χ ψ Y au quarré A ψ. Mais le rectangle χ ψ Y eſt égal au rectangle T ψ H (comme nous le démontrerons ci-deſſous.) Et partant le rectangle T ψ H eſt au quarré A ψ, comme le quarré T H au quarré ϵ β. Et comme la ligne A ψ eſt parallele à M N ou ϵ β, elle eſt ordonnée au diamétre T H: Et partant le point A eſt dans l'Hyperbole dont T H & ϵ β ſont diamétres de même conjugaiſon.

Il eſt conſtant que le point H étant au bout d'un des diamétres ſuſdits, il eſt auſſi dans la même Hyperbole. Mais pour prouver que le point B s'y trouve auſſi, il faut diſcourir de cette ſorte. Le rectangle ζ Y S eſt au rectangle M Y P, en raiſon compoſée de celles des lignes ζ Y à M Y, (ou ζ S à B S,) & Y S à Y P, ou B S; leſquelles compoſent auſſi la raiſon du rectangle ζ S Y au quarré B S: Et partant le rectangle ζ Y S, ou ſon égal le quarré Y H ſera au rectangle M Y P, ou ſon égal le quarré ϵ Y (comme nous le démontrerons ci-deſſous,) comme le rectangle ζ S Y au quarré B S. Mais nous ferons auſſi voir ci-deſſous, que le rectangle ζ S Y eſt égal au rectangle T S H; Et partant comme le quarré Y H au quarré ϵ Y, ou (prenant leurs quadruples) comme le quarré du diamétre T H au quarré du diamétre ϵ β, ainſi eſt le rectangle T S H au quarré B S: mais la même B S étant parallele à ϵ β, eſt ordonnée à T H: Donc le point B eſt auſſi dans l'Hyperbole, dont les deux

droites T H & ♦β ſont diamétres de même conjugaiſon.

Je dis de plus, que cette Hyperbole touchera les lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H. Ce qui eſt premierement conſtant pour le point H, par la 6. du 2. des Coniques, la ligne E F étant menée au bout d'un des diamétres H T, & parallele à l'autre ♦β. Mais pour les deux autres points, je le démontre en cette maniere.

D'autant que la ligne A ♆ ordonnée au diamétre T H, le coupe en ♆ de telle ſorte que χ ♆ ſoit moyenne Harmonique entre les deux T ♆ & H ♆; la ligne A C χ touchera la ſuſdite Hyperbole au point A par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius. Et par la même propoſition, & le même raiſonnement, la ligne B D ♀ touchera la même Hyperbole au point B, d'où la ligne B S eſt ordonnée au diamétre T H, & le coupe au point S, en telle ſorte que la ligne ♀ S ſoit moyenne Harmonique entre les deux T S & S H.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes T H, & ♦β pour diamétres de même conjugaiſon d'une Hyberbole, qui touchera les trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant démontrer que le rectangle χ ♆ Y eſt égal au rectangle T ♆ H, ce qui ſe fait ainſi. Parce que ♆ Y eſt à Y H, ou T Y, comme T Y à Y χ; en compoſant, & par converſion de raiſon T ♆ ſera à ♆ Y comme χ T à T Y, ou H Y; & en permutant, & par converſion de raiſon T ♆ ſera à ♆ χ comme ♆ Y à ♆ H: Et partant le rectangle des moyennes χ ♆ Y ſera égal à celui des extrêmes T ♆ H.

Par même raiſonnement, on peut voir que le rectangle ♀ S Y eſt auſſi égal au rectangle T S H. De ſorte qu'il ne reſte plus qu'à montrer, que le rectangle M Y P eſt égal au quarré Y β, ou ♦ Y, c'eſt-à-dire, au rectangle N Y ♂. Ce qui ſe fait en cette maniere. Parce qu'il a été démontré ci-deſſus dans la précedente propoſition, que la ligne E 9 étoit à H 9 comme H 9 eſt à F 9; & que dans les triangles ſemblables H X 9, 7 X 8, la ligne H 9 eſt à F 9 comme 78

eſt à 8 Y ; & dans les triangles ſemblables E V 9, Y V 8, la ligne E 9 eſt à H 9 comme 8 Y eſt à 86 : Il s'enſuit que 78 eſt à 8 Y comme 8 Y eſt à 86, & en la même raiſon de E 9 à H 9, c'eſt-à-dire, de E H à H F, ou de 2 Y à Y R. Mais comme 78 eſt à 8 Y, ainſi 7 Y à Y 6 : Donc 7 Y ſera à Y 6 comme 2 Y à Y R ; & le rectangle des extrêmes 7 Y R ſera égal à celui des moyennes 6 Y 2.

Maintenant, comme ζ Y eſt à H Y, ainſi H Y à Y S ; en diviſant ζ Y ſera à ζ H comme H Y à H S. Mais comme ζ Y à ζ H, ainſi M Y à F H, ou ſon égale Y R ; & comme H Y à H S, ainſi 7 Y à B S, ou ſon égale Y P : Donc M Y ſera à Y R comme 7 Y à Y P ; & le rectangle des moyennes 7 Y R ſera égal à celui des extrêmes M Y P.

Par même diſcours on fera voir que le rectangle 6 Y 2 ſera égal au rectangle N Y δ. Et partant le rectangle 7 Y R eſt à M Y P comme 6 Y 2 à N Y δ ; & en permutant comme le rectangle 7 Y R eſt égal au rectangle 6 Y 2, ainſi M Y P ſera égal à N Y δ, ou au quarré ε Y, ou β Y. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIE'ME OBSERVATION.

DAns les neuf Problêmes ci-deſſus, la difficulté de la préparation dont nous avons parlé au commencement de ces Diſcours eſt compriſe, & de ce qu'il faut faire avant que l'on puiſſe ſe ſervir du Problême de Pappus ; c'eſt-à-dire, de trouver les diamétres de même conjugaiſon de la ſection qui doit toucher les lignes des pieds droits aux points donnez.

Mais parce que, ſans parler de la ligne qui détermine la hauteur, on pourroit propoſer un Arc à décrire, qui paſſant par un point donné, toucheroit deux pieds droits en deux autres points auſſi donnez ; & qu'en ce cas les Ouvriers ſe pourroient trouver embarraſſez, qui ne ſçau-

roient pas que l'on pût facilement, par ce point donné, mener cette ligne que nous avons ſuppoſé dans les propoſitions ci-deſſus, pour déterminer la hauteur de l'Arc à décrire, & avec cet avantage, que ce ſera en ce même point que ſe fera l'attouchement de l'Arc & de la ligne ſuſdite.

Il m'a ſemblé à propos de le faire voir, & d'en donner les pratiques dans ce Diſcours, par une propoſition univerſelle en cette ſorte.

PROBLEME.

Ayant à décrire un Arc rampant par un point donné, & entre deux pieds droits, qu'il touche en deux autres points auſſi donnez. Trouver la ligne droite, qui détermine la hauteur de l'Arc; c'eſt-à-dire, la ligne qui doive toucher l'Arc au ſuſdit premier point donné.

Planches VIII. IX. & X.

Les deux pieds droits (dans les Figures de la 8. 9. & 10. Planche) ſoient A C, & B D, paralleles, ou non paralleles, & le point donné H, par lequel il faut décrire un Arc rampant, qui touche A C en A, & B D en B. Qu'il faille trouver la ligne E H F, qui détermine la hauteur de cet Arc, en ſorte qu'il la touche au même point H.

Après avoir tiré la ligne de la rampe A B, & continué les pieds droits A C & B D, en ſorte qu'ils ſe rencontrent au point G, s'ils ne ſont point paralleles; il faut de l'un des points A ou B, par le point H, tirer une droite comme B H, & alors.

PREMIERE PROPOSITION.

Fig. I. II. de la VIII. Planche

Si les pieds droits ſont paralleles (comme aux Figures 1. & 2. de la 8. Planche) la ligne B H rencontrera l'autre pied droit A C prolongé au point K; auquel cas il faut diviſer la ligne A K en deux également en E, & mener par le point H la droite E H F, qui ſera celle que l'on cher-

che ; parce que, ou elle ſera parallele à la rampe A B, (comme en la 1. Figure) ou elle la rencontrera, étant prolongée comme en I, (en la 2. Figure.)

Premier Cas.

Puiſque dans le triangle A K B (Figure 1. de la 8. Planche) la ligne E H a été menée parallele à la baſe A B, le côté A K ſera à K E comme A B eſt à E H ; Mais A K a été faite double de K E ; & partant la ligne A B, ou ſon égale E F, ſera auſſi double de la même E H ; & la ſection, qui paſſant ſur le point H, touchera les deux lignes droites A C, & B D aux points A & B ; touchera auſſi la ligne E F au même point H ; & ceci tombe dans la ſolution du 4. Problême ci-deſſus. *Figure I. de la VIII. Planche.*

Second Cas.

C'eſt-à-dire, lorſque la ligne E F (Figure 2. de la 8. Planche) rencontre la ligne A B prolongée en I ; parce que les deux lignes A E, & E K ſont égales, elles auront même raiſon à la ligne B F ; qui leur étant parallele, il s'enſuivra qu'aux triangles E K H, B H F, la ligne E K ſera à B F, c'eſt-à-dire, E H à H F, comme dans le triangle A I E, la ligne A E à la même B F, c'eſt-à-dire, E I à I F : Et partant la ligne E I ſe trouvera coupée Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne I H ſera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F : Et par conſéquent la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la ligne E F au même point H : Et ceci tombe dans la ſolution du 5. Problême. *Figure II. de la VIII. Planche.*

SECONDE PROPOSITION.

Si les pieds droits étant en talu, ſe rencontrent en G au-deſſous de la rampe A B (Figures 3. & 4. de la 8. Planche ;) & la ligne tirée du point B par H eſt parallele à l'au- *Figure III. & IV. de la VIII. Planche.*

tre pied droit A C ; il ne faut que prendre ſur G A prolongée une ligne A E égale à A G, & mener la ligne E H F, qui ſera parallele à la rampe A B (comme en la 3. Figure,) ou bien elle la rencontrera, comme en I, (en la 4. Figure.)

Premier Cas.

Figure III. de la VIII. Planche. Au premier Cas (Figure 3. de la 8. Planche,) parce que dans le triangle E G F, la ligne A B eſt ſuppoſée parallele à la baſe E F ; la ligne G A ſera à A E comme G B à B F ; Et parce que dans le même triangle E F G, la ligne B H eſt parallele à la baſe E G ; la ligne G B ſera à B F comme E H eſt à H F ; Et partant, par égalité, la ligne G A ſera à A E comme E H à H F ; mais G A eſt égale à A E : Donc E F ſera diviſée en deux également en H ; Et comme elle eſt parallele à la rampe A B, la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la même E F en H. Et ceci tombe dans la ſolution du 6. Problême.

Second Cas.

Fig. IV. de la VIII. Planche. Au ſecond Cas, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne E F étant prolongée, rencontre la rampe A B, comme en I ; (Figure 4. de la 8. Planche,) il faut diſcourir en cette maniere, après avoir mené par le point E la ligne O E P parallele au côté B D, & qui rencontre la rampe en O, & la ligne B H prolongée en P. Parce que les triangles A E O, A G B ſont ſemblables, à cauſe des paralleles E O, & B G, & des angles au ſommet A ; ils ſeront auſſi égaux, à cauſe de l'égalité des côtez A E, & A G ; & partant les autres côtez E O, & B G ſeront auſſi égaux : Mais B G eſt égale à E P, étant paralleles, & entre paralleles : Donc E O ſera égal à E P ; & E O ſera à B F, (c'eſt-à-dire, dans le triangle E I O, la ligne E I à I F,) comme E P à la même B F, c'eſt-à-dire, dans les triangles ſemblables E H P, B H F, comme la ligne E H à H F : Et partant la ligne E I ſera diviſée Harmoniquement

Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne I H ſera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F: Et par conſéquent la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la même E F au point H. Et ceci tombe dans la ſolution du 8. Problême.

TROISIEME PROPOSITION.

Si les pieds droits étant en talu & ſe rencontrant en G au-deſſous de la rampe A B, la ligne tirée du point B par le point donné H, coupe le côté A C prolongé en K; (Figures 1. & 2. de la 9. Planche,) il faut premierement couper la ligne A K en deux également au point L, par lequel il faut mener L M parallele à B K & égale à A L ou L K; & du point G par M tirer la droite G M juſqu'en N, où elle rencontrera la ligne B K prolongée; puis faire K E égale à K N, & du point E par H mener la ligne E H F, & raiſonner en cette maniere. Comme au triangle K G N, la ligne L M eſt parallele à la baſe K N; la même L M ſera à K N: c'eſt-à-dire, A L à K E, comme G L à G K; & prenant les doubles des antécédens, A K ſera à K E comme A G & G K enſemble à G K; & en diviſant A E ſera à K E comme A G à G K; & en permutant, & changeant G K ſera à K E comme A G à A E; & la toute G K ſera diviſée Harmoniquement aux deux points E & A, en ſorte que la ligne A K ſoit la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes G K & K E. *Fig. I. & II. de la IX. Planche.*

Maintenant, ou la ligne tirée du point E par H, ſera parallele à la rampe A B, (comme en la 5. Figure,) où elle la rencontrera comme en I, (en la 6. Figure.)

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 9. Planche:) Après avoir mené par le point E la ligne O P parallele au pied droit B D, & rencontrant la rampe en O, & la ligne B H *Fig. I. de la IX. Planche.*

prolongée en P, je dis que la ligne EP dans le triangle GKB, ayant été tirée parallele à la baſe GB, le côté GK ſera à KE comme GB à EP; & dans les deux triangles ſemblables GAB, EAO, la ligne GA ſera à AE comme la même GB eſt à EO. Mais parce que GK eſt à KE comme GA eſt à AE; il s'enſuit que GB ſera à PE comme la même GB eſt à EO; & que les deux lignes EP & EO ou BF ſeront égales; & que dans les triangles ſemblables EHP, BHF, les deux cotez EH & HF ſeront égaux; & la ligne EF ſera diviſée en deux également en H; & comme elle eſt parallele à la rampe AB, la ſection qui paſſant par le point H, touchera les deux pieds droits AC & BD en A & B, touchera auſſi la ligne EF en H. Et ceci tombe dans la ſolution du 6. Probl.

Second Cas.

Fig. II. de la IX. Planche. Au ſecond Cas (Figure 2. de la 9. Planche; c'eſt-à-dire, lorſque la ligne EF rencontre la ligne AB prolongée comme en I: Après avoir comme deſſus mené la ligne OEP parallele au pied droit BD, & coupant les lignes AB en O, & BH en P; je dis que dans le triangle GKB, la ligne EP ayant été menée parallele à la baſe GB; la ligne GK ſera à KE comme GB à EP; mais celle-ci eſt compoſée des raiſons de GB à BF, & de BF à EP, c'eſt-à-dire, FH à HE: il s'enſuit que la raiſon de GK à KE ſera égale aux raiſons de GB à BF, & de FH à HE. De plus, les triangles GAB, EAO étant ſemblables, auſſi-bien que BIF, OIE; la ligne GA ſera à AE, comme GB eſt à EO, c'eſt-à-dire, en raiſon compoſée de GB à BF, & de BF, EO, c'eſt-à-dire, FI à EI. Mais il a été démontré que la raiſon de GK à KE étoit égale à celle de GA à AE: Donc la raiſon compoſée de GB à BF, & de FH à HE, ſera égale à celle de la même GB à BF, & de FI à IE: ôtant donc la raiſon commune de GB à BF, la raiſon de FI à IE ſera égale à celle de FH à HE; & la ligne IF

ſera diviſée Harmoniquement aux deux points E & H, & la ligne I H ſera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes I F & I E : Et par conſéquent la ſection, qui paſſant par le point H touchera les deux pieds droits A C en A & B D en B, touchera auſſi la ligne E F en H. Et ceci tombe dans la ſolution du 8. Problême.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si les pieds droits, étant en ſurplomb, ſe rencontrent au-deſſus de la rampe au point G (comme aux Figures 1. 2. & 3. de la 10. Planche ;) il faudra du point B par H mener indéfiniment une droite B H, qui coupe l'autre pied droit A C en K ; & après avoir diviſé la ligne A K en deux également en L, & mené L M parallele à B H, & égale à A L ; il faut joindre les deux points G M par une droite, qui coupe la même B H prolongée en N, & faire K E égale à K N ; & par le point E tirer O P parallele à B D, & rencontrant les lignes A B & B H en O & P. Enſuite nous dirons que L M étant parallele à K N, L G eſt à G K comme L M eſt à K N, c'eſt-à-dire, A L à K E ; & prenant les doubles des antécedens A G & G K enſemble ſeront à G K comme A K à K E ; & en diviſant A G à G K comme A E à E K ; & en permutant A G eſt à A E comme G K à E K : Et partant la ligne A G eſt diviſée Harmoniquement aux deux points E & K, & la ligne A K eſt moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A G & A E. Maintenant, ſi l'on tire du point E par H une droite E F, elle ſera parallele à la rampe A B, (comme en la 1. Figure,) où elle la rencontrera comme en I, aux 2. & 3. Figures.

Fig. I. II. III. de la X. Planche.

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 10. Planche :) Parce qu'aux triangles ſemblables G A B, E A O, la ligne G A eſt à A E comme G B eſt à E O ; & aux triangles ſemblables G K B, E K P, la ligne G K eſt à K E comme la même G B

Figure I. de la X. Planche.

eſt à E P, la raiſon de G A à A E étant ègale à celle de G K à K E ; il s'enſuit que la raiſon de G B à E O ſera auſſi égale à celle de G B à E P, & que la ligne E O, ou ſon égale F B ſera égale à la ligne E P ; & qu'aux triangles ſemblables E H P, F H B, les deux lignes E H & H F ſont égales, & la ligne E F diviſée en deux également en H ; & comme elle eſt parallele à la rampe A B, la ſection qui paſſant par le point H, touchera les deux pieds droits A C en A & B D en B, touchera auſſi la ligne E F en H. Et ceci tombe dans la ſolution du 7. Probl.

Second Cas.

Fig. II. & III. de la X. Planche. Au ſecond Cas, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne E F coupe la rampe A B en I, ſoit de la part de A (comme en la 2. Figure,) ou de la part de B (comme en la 3. Figure de la 10. Planche ;) je dis que la raiſon de G A à A E étant la même que celle de G B à E O ; & celle-ci étant compoſée des raiſons de G B à B F & de B F à E O, c'eſt-à-dire, de I F à I E ; la raiſon de G A à A E ſera compoſée des raiſons de G B à B F, & I F à I E. De même la raiſon de G K à K E étant la même que celle de G B à E P, & celle-ci étant égale aux deux raiſons de G B à B F & B F à E P, c'eſt-à-dire, F H à H E ; la raiſon de G K à K E ſera compoſée des raiſons de G B à B F & de F H à H E : mais G A eſt à A E comme G K à K E ; Et partant la compoſée de G B à B F & I F à I E, ſera égale à la compoſée de G B à B F, & F H à H E ; & ôtant la raiſon commune de G B à B F, les deux autres I F à I E, & F H à H E ſeront égales, & la ligne F I (dans la 2. Figure) ſera diviſée Harmoniquement aux points E & H ; & la ligne E I (dans la 3. Figure) aux points F & H : Et en l'une & en l'autre la ligne I H ſera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F. Et partant la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les deux pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la droite E H au point H. Et ceci tombe dans la ſolution du 9. Probl.

Voilà donc la réſolution de tous les Cas qui peuvent être conſiderez ſur cette matiere ; où il paroît qu'il faut que le point donné ſe trouve entre les lignes des pieds droits, ſi l'on veut rendre la queſtion poſſible ; parce que l'Arc, qui partant des points A & B de la rampe, paſſeroit par un point poſé hors les lignes A C, & B D prolongées, couperoit néceſſairement ceſdites lignes, & par conſéquent il ne les pourroit pas toucher aux points A & B.

Et de cette façon j'eſtime qu'il eſt pleinement ſatisfait à tout ce qui peut être propoſé ſur la préparation néceſſaire à la régle de Pappus, c'eſt-à-dire, à la recherche des diamétres de même conjugaiſon d'un Arc à décrire, qui touche deux pieds droits en deux points donnez, ſoit que la hauteur de l'Arc ne ſoit pas donnée, ou qu'elle ſoit déterminée par un point, ou par une ligne, ou par un plan.

QUATRIE'ME OBSERVATION.

MAis parce que l'auſtérité de la démonſtration nous a obligé à quantité de lignes inutiles pour la pratique, & qui peuvent embarraſſer les Ouvriers, qui ne ſont pas accoûtumez à les démêler ; il m'a ſemblé que je ferois une choſe qui leur ſeroit agréable, ſi je leur enſeignois une Méthode univerſelle & facile de trouver ces diamétres en toute ſorte de Cas. Ce qui ſe fait ainſi.

Maniere univerſelle de trouver les diamétres de même conjugaiſon de la Section qui doit former l'Arc rampant ſur toute ſorte de pieds droits & de hauteurs.

Soient (aux Figures de la Planche 11. & aux 2. premieres de la 12. Planche) les pieds droits A C & B D continüez indéfiniment, en ſorte qu'ils ſe rencontrent en G, s'ils ne ſont point paralleles ; & la ligne de la rampe A B ſoit diviſée en deux également en Z ; & du point Z ſoit *Planche XI. & Fig. I. & II. de la XII. Planche.*

menée une droite, ou parallele aux pieds droits, (ſi ceux-ci le ſont entr'eux,) ou paſſant par le point de leur rencontre G: Enſuite ſoit la ligne donnée ou non donnée E F qui détermine la hauteur de l'Arc propoſé, laquelle ſoit ou parallele à la ligne de la rampe A B, ou la rencontrant au point I; & cette ligne E F, compriſe entre les lignes A C & B D continüées, ſoit coupée en deux également en K, d'où il faut mener une ligne K M égale à K F, & qui faſſe quelque angle que ce ſoit avec E F; & mener I M, à laquelle du point F, il faut tirer une parallele F L, & faire K H égale à K L; puis du point H il faut mener la ligne H B, & la diviſer en deux également en S, par où du point F il faut tirer la ligne F S Y; laquelle ſera ou parallele à la ligne G Z, ou elle la rencontrera au point Y dans l'angle A G B, ou dans celui qui lui eſt au ſommet. Au premier Cas la ſection ſera une Parabole en la 1. Figure de la 12. Planche. Au ſecond Cas une Ellipſe, aux 5. Figures de la Planche 11. & une Hyperbole au troiſiéme Cas dans la 2. Figure Planche 12. Et joignant aux deux derniers Cas la ligne H Y, & la continüant en ſorte que Y T ſoit égale à Y H, & menant par le point Y la ligne V Y X parallele à E F, ſur laquelle du point B tombe la ligne B N parallele à H Y; il faut faire Y Q égale à Y N, & ſur la ligne Q Y X comme diamétre, décrire le demi-cercle X R Q, qui ſoit coupé en R par la ligne Y R tirée du point Y perpendiculaire à V X; & enfin faire les deux lignes Y O, & Y P égales à Y R; Les diamétres de même conjugaiſon de l'Ellipſe, ou de l'Hyperbole que l'on demande, ſeront les deux lignes H T & O P.

Et pour la Parabole, il faut du point B mener B N parallele à E F, (comme en la 1. Figure de la 12. Planche) & H V parallele à G Z, qui coupe B N en N; ſur laquelle il faut prendre H V égale à B N, & du point V mener V X parallele à E F, & rencontrant la ligne H B prolongée en X; & enfin prendre ſur E F continüée la ligne H T égale à

V X. La ligne H N ſera le diamétre de la Parabole, auquel B N ſera ordonnée ſous l'angle H N B, & la ligne H T en ſera le Paramétre.

TROISIE'ME DISCOURS.

Trouver les Axes d'une Section ſervant à la deſcription d'un Arc rampant, dont les diamétres de même conjugaiſon ſont donnez.

PREMIERE OBSERVATION.

Premier moyen par la Regle de Pappus.

CEs choſe étant ſuppoſées, il ne reſte plus qu'à trouver les Axes & les foyers pour décrire facilement la Section propoſée, c'eſt-à-dire, appliquer aux diamétres trouvez de l'Ellipſe, la Regle de Pappus, dont nous avons parlé au commencement de ces Diſcours, & dont nous rapporterons premierement la pratique qui ſe doit entendre pour toute ſorte de Cas, & nous la démontrerons enſuite. Le Problême eſt donc tel.

REGLE DE PAPPUS.

Deux diamétres de même conjugaiſon d'une Ellipſe étant donnez, en trouver les Axes & les foyers ou ſingliots.

Les deux diamétres de même conjugaiſon H T & O P étant propoſez (aux Figures de la 13. Planche) *& par le point H, la ligne E H F indéfiniment prolongée, & parallele à O P; il faut ſur H T au point A élever à angles droits la ligne H I égale à O Y, & mener I Y; ſur laquelle au point I il faut tirer à angles droits la ligne I K, qui rencontre la ligne T H prolongée en K. Enſuite, après avoir diviſé en deux également au point R la ligne Y K, & mené à angles droits la ligne R S,* Planche XIII.

qui coupera E F en quelque part comme en S (parce que les diamétres H T, & O P n'étant pas les Axes, l'angle H Y P, ou ſon égal E H Y ne ſera pas droit ;) il faut du point S comme centre, & de l'intervalle S Y ou S K, décrire le cercle K δ Y ζ, lequel coupe la ligne E F aux deux points δ & ζ ; d'où par le point Y, il faut mener les deux lignes indéfinies β Y & δ Y ; ſur leſquelles du point H, il faut mener à angles droits les lignes H L, & H M. Enſuite il faut faire ſur la ligne β Y prolongée la ligne N Y égale à Y L ; & ſur la ligne β N comme diamétre, décrire un demi-cercle N Q β qui coupe δ Y au point Q, & rapporter la ligne Y Q de part & d'autre du point Y ſur β Y, en ſorte que les lignes Y V, & Y X ſoient égales à Y Q ; & par ce moyen nous aurons la toute V X pour l'un des Axes. En la même maniere prenant ſur δ Y prolongée la ligne Y ζ égale à Y M, & ſur la toute δ ζ comme diamétre décrivant le demi-cercle δ λ ζ qui coupe β Y prolongée au point λ ; il faut de part & d'autre du point Y, ſur la ligne δ Y prendre les deux Y G & Y Z égales à Y λ, afin d'avoir la toute G Z pour l'autre Axe. Et prenant une extremité du moindre Axe comme le point G pour centre, & de l'intervalle G θ égal à la moitié de l'autre Axe, c'eſt-à-dire à Y V ; il faut décrire les deux Arcs de cercle qui coupent la ligne β Y, c'eſt-à-dire, le plus grand Axe aux deux points θ & ε, leſquels ſeront les foyers de la ſuſdite Ellipſe, que les Ouvriers appellent les ſingliots.

Voilà la pratique de Pappus, qui eſt la 14. propoſition du 8. livre de ſes Collections Mathématiques : Et quoique je ne la rapporte pas tout-à-fait dans les mêmes termes, c'eſt pourtant toujours la même choſe ; & ce que j'y ai ajouté n'eſt que pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers : comme lors qu'il dit ſeulement qu'il faut faire le rectangle Y H K égal au quarré O Y, parce que, la maniere d'appliquer un quarré à une ligne droite, qui eſt la même que de trouver une troiſiéme proportionnelle à deux droites données, n'eſt pas familiere aux Ouvriers ; j'ai mieux aimé leur en marquer l'opération par le moyen du triangle

gle rectangle Y I K, (dans lequel la ligne I H étant perpendiculaire à la baſe Y K, le quarre H I, ou ſon égal O Y eſt égal au rectangle Y H K, ainſi que Pappus l'ordonne,) que de la ſuppoſer comme lui toute faite. Tout de même, quand il dit qu'il faut faire les deux quarrez Y V, & Y X égaux au rectangle ϛ Y L, & les deux quarrez Y G & Y Z égaux au rectangle ϡ Y M; j'en ai fait les opérations toutes entieres par le moyen des demi-cercles N Q ϛ & ϡ λ ζ.

Au reſte, ce Problême n'a que cette ſeule conſtruction; & Commandin qui a commenté cet Auteur, s'étonne avec raiſon qu'il ne l'ait pas démontrée. Mais comme il y a dans le texte de la Propoſition quelques obſcuritez qui marquent qu'il a été corrompu, je crois que la démonſtration que Pappus en avoit faite s'eſt perduë avec le reſte de ſes Ouvrages qui nous manquent.

Mais ce qui me ſurprend d'avantage, c'eſt que Commandin ayant entrepris de la réparer, y ait ſi mal réüſſi lui-même, n'ayant pas pû conclure, comme il fait, que les lignes X V & G Z ſoient Axes de l'Ellipſe, parce que l'angle β Y ϡ eſt droit, auſſi-bien que les angles au point L; mais bien ſeulement que au cas que la ligne X V ſoit l'Axe, la ligne H L lui ſera ordonnée; puis que quelque point de la ligne E F que l'on prenne pour centre d'un cercle qui paſſe par Y, & coupe E F en deux autres points que β & ϡ, d'où l'on mene deux lignes au même point Y; l'angle de ces lignes ſera toujours droit au ſuſdit point Y, & l'on pourra tirer du point H une ligne qui faſſe auſſi angle droit avec celle qui viendra d'un autre point que ϛ au point Y; & cependant cette ligne ne ſera pas l'Axe de l'Ellipſe. Et je m'étonne que Commandin ne ſe ſoit pas apperçû que toute la force de la conſtruction de Pappus dépend de ce que le rectangle Y H K, c'eſt-à-dire, ϡ H β, eſt égal au quarré O Y, & qu'il n'ait pas ſçû la verité de ce Théorême que je démontre en cette maniere.

THEOREME.

Si deux diamétres de même conjugaiſon étant donnez dans une Ellipſe, l'on tire de l'extremité de l'un d'eux une Contingente qui rencontre les deux Axes: le rectangle des parties de la Contingente entre les Axes, & le point de l'attouchement, eſt égal au quart du quarré de l'autre diamétre.

Fig. III. de la XII. Planche.

Soient dans l'Ellipſe V G X Z, dont les Axes ſont V X & G Z (dans la 3. Figure de la 12. Planche) deux diamétres de même conjugaiſon H T & O P; & de l'extrémité d'un d'eux, comme de H ſoit tirée la touchante ♪ H ϵ, (qui ſera par conſéquent parallele à O P) laquelle coupe les Axes, ſçavoir V X au point ϵ, & G Z au point ♪; je dis que le rectangle ♫ H ♪ eſt égal au quarré O Y.

Pour le démontrer, il faut premierement au point O mener une autre Contingente ξ O π, (qui ſera auſſi parallele à H T,) & qui coupe les Axes V X en π, & G Z en ξ; puis au point V en mener une autre Φ V ζ, (laquelle ſera auſſi parallele à l'Axe G Z,) & qui coupe la Contingente ♪ H en Φ, & O P prolongée en ζ enfin des points H & O mener H M & H L, O μ & O ν, ordonnées aux Axes V X & G Z, & continuer H L en ϵ.

Maintenant, à cauſe de la touchante ♪ H ϵ, le rectangle ϵ Y L eſt égal au quarré V Y; & à cauſe de la touchante ξ O π, le rectangle π Y μ eſt auſſi égal au même quarré V Y; les deux rectangles donc ϵ Y L, & π Y μ ſont égaux. Et partant la ligne ϵ Y eſt à π Y comme Y μ à Y L. De plus, comme les lignes ♪ ϵ, O Y ſont paralleles, auſſi-bien que les lignes π ξ & H Y; les triangles ϵ H Y, Y O π ſont ſemblables, auſſi-bien que les triangles ϵ H L, Y O μ: & partant dans les deux premiers ϵ Y ſera à π Y comme H ϵ à O Y: & dans les deux derniers H ϵ ſera à O Y comme H L à O μ; & par conſéquent ϵ Y ſera à π Y comme H L à O μ. Mais nous avons démontré cy-deſſus que ϵ Y étoit à π Y comme

Yμ à YL, c'eſt-à-dire, dans les triangles OYμ, ςYL, comme Oμ à Lς: Donc HL ſera à Oμ, comme Oμ eſt à Lς & partant le rectangle HLς ſera égal au quarré Oμ; & par conſéquent le quarré YL aura même raiſon au rectangle HLς, qu'au quarré Oμ Mais la raiſon du quarré YL au rectangle HLς eſt compoſée de celles de YL à HL, ou à ſon égale YM, & de YL à Lς, c'eſt-à-dire, à cauſe que les triangles YLς, ϛYϑ ſont ſemblables, de ϛY à Yϑ, leſquelles compoſent auſſi la raiſon du rectangle ϛYL au rectangle ϑYM, ou de leurs égaux le quarré VY au quarré GY: Donc le quarré YL ſera au quarré Oμ comme le quarré VY au quarré GY, ou prenant leurs quadruples, comme le quarré de l'Axe VX au quarré GZ. Mais comme le quarré VX au quarré GZ, ainſi le rectangle Vμ X eſt au quarré Oμ: Donc le quarré YL, & le rectangle Vμ X auront même raiſon au quarré Oμ & partant ils ſeront égaux: Et par conſéquent le rectangle ϛYL ſera au quarré YL, c'eſt-à-dire, la ligne ϛY à YL, comme le même rectangle ϛYL, ou ſon égal le quarré VY, au rectangle Vμ X; & par converſion de raiſon ϛY ſera à ϛL comme le quarré VY au quarré Yμ. Mais comme ϛY à ϛL, ainſi ϛϑ eſt à ϛH, c'eſt-à-dire, en prenant ϑH pour commune hauteur, le rectangle βϑH au rectangle ϛHϑ: Donc le rectangle ϛϑH ſera au rectangle ϛHϑ comme le quarré VY au quarré Yμ Mais à cauſe des paralleles ϑY, HL, & φV, le rectangle ϛϑH eſt égal au quarré ϑφ, comme le rectangle ϛYL eſt égal au quarré VY: Et partant le quarré ϑφ, ou ſon égal Yζ, ſera au rectangle ϛHϑ, comme le quarré VY au quarré Yμ. Mais comme le quarré VY au quarré Yμ, ainſi eſt le quarré Yζ au quarré OY: Donc le quarré Yζ aura même raiſon au rectangle ϛHϑ qu'au quarré OY: Et par conſéquent le rectangle ϛHϑ eſt égal au quarré OY. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Autre moyen de trouver les Axes ſuſdits.

APrès avoir ſuffiſamment diſcouru ſur la maniere de Pappus, pour trouver les Axes d'une Ellipſe, dont les diamétres de même conjugaiſon ſont donnez ; il ne reſte plus qu'à en enſeigner une qui trouve ceux de la Parabole, & de l'Hyperbole, ainſi que nous l'avons promis. Mais comme la regle, par laquelle on réſout le Problême pour ces deux Sections, eſt univerſelle, & ſert auſſi à réſoudre celui de l'Ellipſe ; il m'a ſemblé qu'il ne ſeroit pas inutile de l'expliquer en cet endroit, & que les Ouvriers m'auroient une double obligation, ſi je leur enſeignois divers moyens de parvenir à un même but, deſquels ils pourront choiſir celui qui leur ſera plus agréable, ou même faire la preuve de l'un par l'autre, puis qu'étant également vrais & démonſtratifs, ils doivent également bien réüſſir, ſi on fait les opérations comme il ſe doit.

Maniere univerſelle de trouver les Axes d'une Section Conique, dont les diamétres de même conjugaiſon ſont donnez.

Pour l'Ellipſe & pour l'Hyperbole.

Fig. de la XIV. Planche.

Soient donnez deux diamétres de même conjugaiſon d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole H T & O P ſe coupans au centre Y, & l'angle H Y P (comme aux Figures de la 14. Planche.) Il faut premierement prendre la ligne H D troiſiéme Géometrique aux deux T H & O P, & l'ajouter à la ligne T H dans l'Ellipſe, ou la retrancher de la même T H dans l'Hyperbole, ou enfin retrancher la ligne T H de D H, ſi celle-ci eſt plus grande que l'autre ; puis couper en deux également en I la toute, ou la difference T D. Enſuite ſur la ligne H Y comme diamétre ſoit décrit

le demi-cercle H N K Y, (en ſorte qu'il ne coupe point l'autre diamétre O P) dont le centre ſoit G, dans lequel ſoit appliqué H N parallele à O P, & continüée indéfiniment; puis, après avoir diviſé H N en deux également en C, & tiré G C, il faut prendre ſur C H continüée, s'il en eſt beſoin, la ligne C B égale à I H, & tirer B L parallele à G C, ou perpendiculaire à C B, laquelle B L rencontre la ligne T H prolongée, s'il eſt beſoin, en L, d'où il faut mener L M parallele à O P, & égale à H D, (de la part de H vers C dans l'Hyperbole, & dans l'Ellipſe, ſi le point I ſe rencontre entre les points D & H comme en la Figure 3. ou de la part oppoſée, ſi le point H ſe trouve entre I & D, comme en la 4. Figure;) & du point M par G mener M K G, qui coupe le demi-cercle en K, par où des points H & Y il faut mener indéfiniment les lignes H K Q, & Y K F, qui rencontre H N continüée en V; après quoi entre les deux V Y & Y K, il faut faire Y E moyenne Géometrique, à laquelle il faut prendre Y F égale, & tirer des points E & Y des lignes indéfinies E R, & Z Y X paralleles à H K; puis aux deux E K & K H faire une troiſiéme Géometrique K Q, & du point F par Q mener F Q R, qui coupe E R en R; & enfin entre les deux E R & E F, trouver une moyenne Géometrique, dont la moitié ſoit égale à chacune des lignes Y X & Y Z: Et faiſant dans l'Ellipſe du point F ſur l'Axe X Z les lignes F A, & F S égales à Y Z; ou bien dans l'Hyperbole du point Y ſur l'Axe E F, les lignes Y A & Y S égales à E Z: on aura les deux Axes que l'on demande Z X & E F, & les deux foyers ou ſingliots A & S.

Pour la Parabole.

Soit O Z le diamétre d'une Parabole, & O R ſon paramétre en l'angle R O Z, (comme en la 1. Figure de la 15. Planche.) Et après avoir continué Z O au-deſſus du point O, il faut prendre O P égal à la moitié du paramétre O R; Fig. 1. de la XV. Planche.

& du point P tirer la ligne P Q perpendiculaire à R O continuée, s'il en eſt beſoin, & du point Q mener Q T parallele à O Z, & O S perpendiculaire à Q T ; enſuite après avoir diviſé Q S en deux également en X, mener X V parallele a O S, & troiſiéme Géometrique aux deux lignes X S & O S. Je dis que le point X ſera le ſommet, la ligne X T l'Axe, & X V le côté droit de la Parabole propoſée.

Fig. III. IV. V. VI. & VII. de la XV. Planche.

La démonſtration de cette maniere univerſelle ſe fait en cette maniere. Après avoir du point K (dans les Figures 3. 4. pour l'Hyperbole, & 5. 6. & 7. de la 15. Planche pour l'Ellipſe, pour éviter la confuſion des lignes dans les Figures de la 14. Planche) mené la ligne K π_ρ parallele a N H, & qui rencontre la ligne G C prolongée, s'il en eſt beſoin, au point O, je raiſonne ainſi. Les triangles G H C, L H B étant ſemblables, L H ſera a G H comme B H a H C, & en compoſant (dans les 3. 4. & 6. Figures) ou par converſion de raiſon (dans la 5.) L G ſera a G H comme B C a C H. Mais a cauſe de la ſimilitude des triangles L G M, H G θ; L G eſt a G H comme L M a H θ: Donc B C eſt a C H comme L M eſt a H θ; & en permutant B C eſt a M L comme C H a H θ. Mais comme B C a été priſe égale a I H, & M L égale a H D ; & comme C H eſt a H θ, ainſi O π eſt a π K: Donc I H eſt a H D comme O π eſt a π K: Et (dans la 3. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, en doublant les conſéquens, par converſion de raiſon, & en changeant ; ou (dans la 4. Figure) en diviſant, doublant les antécedens, & en compoſant ; ou bien (dans la 5. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, doublant les conſéquens, en diviſant, & en changeant ; ou (dans la 6. Figure) en compoſant, doublant les antécedens, & en diviſant ; ou enfin (dans la 7. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, doublant les conſéquens, en diviſant & changeant ; H T ſera a D H comme π_ρ eſt a K π, c'eſt-a-dire, comme le rectangle $_\rho\pi$ K eſt au quarré K π, ou comme le rectangle H π Y au même quarré

Kπ, & en changeant, le quarré de la ligne Kπ ſera au rectangle HπY comme la ligne HD eſt a HT, c'eſt-a-dire, au double de la ligne HY. Mais HD a été priſe dans tous les Cas la troiſiéme proportionnelle aux deux diamétres de même conjugaiſon HT & OP: Donc la ligne HD ſera le paramétre du diamétre HT, par la 4. des ſecondes def. du 1. des Coniques d'Apollonius; & HD étant a la double de HY comme le quarré de Kπ eſt au rectangle H Y; le point K eſt trouvé, ainſi que le demande la préparation des deux cas des Propoſitions 53. & 54. du 1. des Coniques d'Apollonius; & le reſte de notre pratique eſt le même que ce qui eſt fait & démontré dans ces deux Problêmes. La démonſtration pour la Parabole eſt toute entiere dans la 52. Propoſition du même Livre.

TROISIE'ME PROBLEME RESOLU.

Trouver Géométriquement les veritables joints de tête de toutes ſortes d'Arcs rampans.

PREMIER DISCOURS.

APrès avoir enſeigné ci-deſſus la maniere de décrire les Arcs rampans, il eſt bien juſte d'avertir les Ouvriers que leur pratique ordinaire d'en tracer les joints de tête eſt inutile, ou fautive. Voici ce qu'ils font.

Fig. II. de la XV. Planche. Ils diviſent premierement l'Arc comme D A F (dans la 2. Figure de la 15. Planche,) en autant de portions qu'ils veulent faire de Vouſſoirs, comme A B & A C; & voulant tirer le joint de tête, par exemple du point A, ils mettent le Compas ſur le point B, & de quelque ouverture que ce puiſſe être, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la ligne A B, ils font de part & d'autre deux Arcs de cercle comme N M & P Q; puis rapportant le Compas au point C, ils en font deux autres comme R H & T V, qui coupent les premiers en G & O, par où ils tirent la ligne G O; (qui paſſera néceſſairement par le point A,) & ils prennent la portion A G pour leur joint de tête; ce qu'ils font par tous les points de la diviſion de leur Arc, pour avoir par ce moyen tous les autres joints de tête.

Sur quoy je dis premierement, qu'il n'y a qu'aux ſeuls Cas, où l'Arc propoſé eſt portion de cercle, ou bien lors qu'étant une ſection Conique, le joint ſe doit tirer par l'un des ſommets, que cette régle n'eſt pas fauſſe; auſquels Cas en échange elle eſt inutile, puiſqu'il ne faut alors que tirer

tirer les joints au centre ; & qu'en tous les autres Cas ; où l'Arc propoſé eſt portion d'une autre ligne que circulaire, elle eſt abſolument fauſſe & abſurde.

Parce que ſur cette hypothéſe on peut tirer une infinité de lignes differentes, & tendantes à differents points, qui paſſeront néanmoins par un même point de diviſion de l'Arc, & pourront toutes également être le joint de tête du même Arc en ce même point. Je veux dire que ſuivant cette méthode on pourra faire paſſer une infinité de lignes par le point A comme A G, A H, &c. tendantes à differens points comme G, H, &c. & qui pourront autant l'une que l'autre être priſes pour le joint de tête de l'Arc D A F au point A ; ce qui eſt abſurde, puiſqu'il n'y a qu'un ſeul joint de tête qui puiſſe être legitimement appellé tel en chaque point de quelque Arc que ce puiſſe être ; & la régle par conſéquent qui en produit pluſieurs ne peut être que fauſſe & abſurde.

Or qu'il ſoit vrai que par la régle ſuſdite on puiſſe tirer une infinité de lignes par le point A, qui pourront toutes être également priſes pour le joint de tête de l'Arc D A F en ce même point, je le montre en cette maniere. Soit par exemple l'Arc D A F portion d'une Ellipſe, & le point A pris ailleurs qu'au bout d'un des Axes : Et après avoir comme deſſus pris les points B & C également diſtans de A, & tiré les Arcs M N, R H & P Q, T V, afin que des points de leur rencontre G & O, on puiſſe mener la ligne G A O, laquelle ſera perpendiculaire à la ligne B C, & la diviſera en deux également en X, & la ligne A G ſera par cette opération le joint de tête du point A.

Je dis maintenant, que ſi on prend quelqu'autre point dans l'Arc comme D, duquel on tire une ligne D E parallele à B C, & rencontrant la ſection en E, & la droite G O en I, les angles au point I ſeront auſſi droits ; mais les droites D I & I E ne ſont point égales, parce qu'autrement la ligne A O ſeroit l'Axe de l'Ellipſe, (les deux lignes B C

& D E étant paralleles,& toutes deux diviſées également, & à angles droits par A O;) ce qui eſt contre l'hypothéſe: Et partant D I ne ſera point égale à I E, ni par conſéquent la droite A D à la droite A E; Et partant ſi du point A nous inſcrivons dans l'Ellipſe une ligne A F égale à A D, elle tombera ou deſſus ou deſſous du point E, & la ligne D F deſſus ou deſſous de D E, & les angles faits au point K par la ligne G O ne ſeront point droits; & partant D K & K F ne ſeront point égales: Et partant ſi des points D & F également diſtans du point A, on fait ſelon la régle ſuſdite des Arcs de cercle au-deſſus & au-deſſous, par le rencontre deſquels on tire une droite comme H L; elle paſſera par le point A, & coupera au point L la ligne D F en deux également, & par conſéquent elle ne ſera pas la même que G K, & la droite A H ne ſera pas la même que A G; & A H ſera néanmoins le joint de tête de l'Arc au point A, ſuivant la régle ſuſdite. Et comme on peut prendre une infinité de points differens également diſtans de part & d'autre du même point A, & par le moyen deſquels on peut faire une infinité de lignes differentes par la régle ſuſdite, qui peuvent être auſſi legitimement priſes pour le joint de l'Ellipſe au point A, que la ligne A G; & comme ce que je viens de démontrer pour l'Ellipſe,peut être auſſi-bien entendu pour toute autre ſorte de ligne courbe differente de la circulaire; il s'enſuit ce que nous avons dit ci-deſſus, & par conſéquent que la régle qui eſt communément en uſage parmi les Ouvriers, eſt fauſſe.

SECOND DISCOURS.

MAis comme il ſeroit inutile d'avoir découvert la fauſſeté de la pratique ordinaire, ſi l'on n'en enſeignoit une autre qui ne ſoit pas ſujette à ces défauts: j'ai pour ce ſujet aſſez ſérieuſement médité ſur cette matiere; ſur la-

quelle j'ai premierement reconnu que la vraye & univerſelle maniere de tracer les joints de tête de toutes ſortes d'Arcs dans toute leur perfection, tant pour la ſûreté & ſolidité de la liaiſon des Vouſſoirs, que pour la beauté & l'élegance du trait, conſiſtoit à les tirer perpendiculaires à l'Arc, c'eſt-à dire, à plomb ſur les lignes qui toucheroient l'Arc aux mêmes points; puiſque cette pratique, (qui eſt la même que celle dont on ſe ſert au cercle où les joints de tête vont au centre,) ne détermine jamais qu'un ſeul joint de tête en chaque point, & donne aux coupes des Vouſſoirs toute la force & la grace, donc l'Arc puiſſe être capable. Et pour la rendre familiere aux Ouvriers, j'ai tâché de leur en compoſer deux régles ſi faciles, que rien ne les puiſſe doreſnavant empêcher de s'en ſervir; & quoique les Arcs puiſſent être portions de differentes Sections du Cone, comme du Cercle, de l'Ellipſe, de l'Hyperbole, ou de la Parabole; je les ai néanmoins concûës ſous des termes ſi généraux, & ſi propres, qu'elles peuvent également ſervir à toutes.

Maniere univerſelle de tirer les joints de tête de toutes ſortes d'Arcs rampans.

Il faut de chaque point de l'Arc tirer des perpendiculaires à l'Axe de la Section, qui coupent le diamétre qui paſſe par le point, où le côté droit, ou paramétre du même Axe, eſt coupé en deux également; & du point, où la perpendiculaire rencontre l'Axe, comme Centre, & de l'intervalle compris entre le ſuſdit Axe & ledit diamétre, faire un Arc de cercle, qui coupera l'Axe en deux points, de l'un deſquels, ſçavoir de celui qui eſt le plus éloigné du ſommet de la ſection, il faut mener, par le point premierement pris dans l'Arc rampant, une ligne droite, qui marquera le joint de tête que l'on demande.

Soit la ligne A C B l'Axe d'une ſection B K K B, (aux 1.

Fig. I. II. & III. de la XVI. Planche.

2. & 3. Figures de la 16. Planche) dont la ligne B H ſoit le côté droit on paramétre; & par le point I qui diviſe B H en deux également, ſoit menée indéfiniment le diamétre I N : Puis de quelque point pris dans la ſection comme de K, ſoit menée la ligne K M N perpendiculaire à l'Axe qu'elle coupe en M, & le diamétre I N en N ; & du point M comme centre, & intervalle M N, (c'eſt-à-dire, de la portion de la perpendiculaire compriſe entre l'Axe A C B & ledit diamétre I N :) ſoit fait le cercle N L qui coupe le même Axe au point L, en ſorte que le point M ſoit toûjours entre le ſommet de la ſection dont il eſt le plus proche, & le ſuſdit point L ; duquel par le point K, il faut tirer la ligne L K O, qui donnera la droite K O pour le joint que l'on demande.

Mais parce que les Ouvriers ne ſçavent pas toûjours comme on trouve ce diamétre I N, il eſt à propos de leur en enſeigner la maniere, ſuppoſé, par ce qui a été montré dans le précedent Problême, qu'ils connoiſſent les Axes de la ſection propoſée, qui ſoient par exemple les lignes A C B & E C D, par le moyen deſquels il faut trouver la ligne B H côté droit ou paramétre de l'Axe A C B, ce qui ſe fait ainſi. Il faut du centre C prendre ſur l'Axe C A la ligne C F égale à C D, & du point F tirer la ligne F G parallele à A D, & du point A par G dans l'Ellipſe & l'Hyperbole, (Figures 1. & 3.) tirer la droite A G H, qui coupe en H la ligne B H perpendiculaire à A B ; ou bien dans la Parabole (Figure 2.) faire A H égale à C G, & tirer indéfiniment la ligne H G, afin que l'on ait par ce moyen en toutes les Figures la ligne droite B H pour le côté droit, ou paramétre que l'on recherche, qui étant diviſé en deux également en I, & tirant du centre C dans l'Ellipſe & l'Hyperbole, la ligne C I N, ou bien tirant dans la Parabole la ligne I N parallele à A C ; la même I N ſera le diamétre de la ſection que l'on demande. Ce que je démontre en cette maniere.

Digitized by Google

Mais auparavant je dois dire que les diamétres de la Parabole étant tous paralleles, il paroît qu'il n'y a aucun centre de cette Figure, c'eſt-à-dire, aucun point de concours des diamétres ; & pour cet effet nous avons mis les deux extrémitez de l'Axe A & B en un ſeul point, qui eſt le ſommet ; Et pour le point C qui ſert de centre, nous l'avons pris à fantaiſie dans l'Axe, par lequel nous avons mené l'ordonnée E C D, qui fait en la Parabole, en quelque endroit que l'on la prenne, le même effet que le ſecond Axe dans les autres Figures.

Je dis donc pour démontrer que la ligne I N eſt le diamétre que l'on cherche. Parce que C F eſt égale à C D, & G F parallele à A D ; la ligne A C ſera à C D, comme C F, ou ſon égale C D à C G : Et partant dans la Parabole (Figure 2.) le quarré de C D ſera égal au rectangle A C G, & la ligne C G, ou ſon égale A H, ſera le paramétre ou côté droit de l'Axe de la Parabole A C. Mais dans l'Hyperbole & l'Ellipſe (Figures 1. & 3.) puiſque A C eſt à C D comme C D eſt à C G ; le quarré A C ſera au quarré C D (ou leurs quadruples, ſçavoir le quarré de l'Axe A B au quarré de l'Axe E D,) comme la ligne A C à la ligne C G, c'eſt-à-dire, comme l'Axe tranſverſe A B à B H : Et par conſéquent la ligne B H ſera le paramétre ou côté droit de l'Axe tranſverſe A B.

Maintenant, pour démontrer que les lignes K O ſont les véritables joints de tête de la ſection propoſée, & qu'ils la coupent à angles droits ; il faut de quelque point que ce ſoit de la ſection comme *k*, par lequel on a tiré un joint de tête *k o*, mener une ligne droite *k* R perpendiculaire à la ligne *k o*, & qui rencontre l'Axe de la ſection continüée en R, & prolonger la droite *k m* juſqu'à ce qu'elle trouve G H continüée au point *q*. Après quoi, pour faire voir que le joint *k o* coupe la ſection à angles droits, ou (ce qui eſt la même choſe) que la ligne *k* R touche la ſection au point

k, je raiſonne en cette ſorte. D'autant que du ſommet *k* du triangle rectangle *l k* R, on a mené une droite *k m* perpendiculaire à la baſe R *l*, le rectangle R *m l* ſera égal au quarré de *k m*. Mais le même quarré *k m* eſt auſſi égal au rectangle B *m q*, par les 11, 12 & 13 du 1. des Coniques d'Apollonius : Donc les rectangles R *m l* & B *m q* ſeront égaux ; mais parce que la ligne *m l* eſt égale à *m n*, le rectangle R *m l* ſera auſſi égal au rectangle R *m n* ; & partant les deux rectangles R *m n* & B *m q* ſeront égaux ; & la ligne R *m* ſera à B *m* comme *m q* à *m n*, & en diviſant R B à B *m* comme *q n* à *m n* : Et partant comme la ligne *q n* dans la Parabole (Figure 2.) eſt égale à la ligne *m n*, la ligne R B ſera auſſi égale à B *m*, & la droite *k* R touchera la Parabole en *k* par la 33 du 1 des Coniques. Mais pour l'Ellipſe & l'Hyperbole (Figures 1 & 3,) puiſque R B eſt à B *m* comme *q n* eſt à *m n*, & *q n* eſt égale à H I ou B I ; la ligne R B ſera à B *m* comme B I à *m n*, c'eſt-à-dire, comme B C à C *m* ; en permutant & compoſant R C ſera à B C comme B C à C *m*. Et comme A C eſt égale à C B, la toute R A dans l'Ellipſe ſera diviſée Harmoniquement aux deux points B & *m*, & la toute A *m* dans l'Hyperbole aux deux points B & R : & partant, en l'une & en l'autre, la ligne A R ſera à B R comme A *m* à B *m* ; & la ligne *k* R touchera la ſection au point *k*, par la 34. du 1. des Coniques. Et comme la même choſe ſe peut ſemblablement démontrer dans tous les points de la ſection, il paroît de la verité de la propoſition. Ce qu'il falloit démontrer.

Seconde maniere de tirer les joints de tête de toutes ſortes d'Arcs rampans.

Il faut de chacun des foyers de l'Ellipſe & de l'Hyperbole mener des lignes qui ſe rencontrent en un même point de l'Arc ; Mais dans la Parabole il faut du foyer me-

ner une droite, qui ſoit coupée en un point de l'Arc par une ligne parallele à l'Axe. Enſuite dans toutes les ſections, l'angle qui eſt fait par ces lignes au point de l'Arc, doit être coupé en deux également par une droite, qui ſera le joint de tête que l'on demande.

Des points G & F foyers de l'Ellipſe ou de l'Hyperbole, (dans les 4 & 5 Figures,) il faut tirer tant de lignes que l'on voudra G H, F I qui ſe coupent en des points de l'Arc comme en K. Tout de même, il faut du point F foyer de la Parabole, (dans la 6 Figure) mener F I qui ſoit coupée en un des points de l'Arc K, par la ligne H K parallele à l'Axe de la Parabole A F. Enſuite (dans toutes les trois Figures) il faut faire les deux lignes H K & I K égales, & des points I & H comme centres, & de quelque intervalle que l'on voudra, (pourvû qu'il ne ſoit pas plus petit que la moitié de la diſtance entre I & H) l'on doit décrire les deux Arcs qui ſe coupent au point L, d'où il faut mener O L K, qui ſera le joint de tête que l'on recherche. *Fig. IV. V. & VI. de la XVI. Planche.*

La démonſtration en eſt aiſée: Car ayant mené par un des points K la ligne M K N qui touche la ſection au point K, qui fera par conſéquent (ainſi qu'il a été démontré par d'autres) l'angle M K I égal à N K H; & l'angle I K L ayant été fait égal à H K L, il s'enſuit que l'angle M K L eſt égal à N K L; & partant, que L K eſt perpendiculaire à la contingente.

Les points G & F foyers de l'Ellipſe (dans la 4. Figure) ſe trouvent, en faiſant les lignes E F & E G (qui ſont tirées d'une des extrémitez du petit Axe E *D* ſur le grand Axe A B) égales à C B, moitié du grand Axe A B.

Ceux de l'Hyperbole G & F (dans la 5. Figure) ſe trouvent, en prenant du point C, qui eſt le centre, les lignes C G & C F ſur le grand Axe, égales à la ligne E B tirée d'un des bouts du petit Axe E D à une des extrémitez du grand Axe A B.

Le foyer de la Parabole F (dans la 6. Figure) ſe trouve en faiſant depuis le ſommet A la ligne A F égale à A G, c'eſt-à-dire, au quart de la ligne A D qui eſt le paramétre, ou le côté droit de la Parabole.

QUATRIE'ME

QUATRIE'ME PROBLEME RESOLU.

Trouver la ligne ſur laquelle les Poutres doivent ètre coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & réſiſtantes.

PREMIER DISCOURS.

OU

F. B. EPISTOLA AD P. W.

In quà celebris Galilæi propoſitio diſcutitur circa naturam lineæ quà Trabes ſecari debent ſecundùm altitudinem, ut ſint æqualis ubique reſiſtentiæ; & in quà lineam illam non quidem Parabolicam, *ut ipſe Galilæus arbitratus eſt, ſed* Ellipticam *eſſe, demonſtratur.*

F. B. P. W. S. P. D.

PErgratæ mihi tuæ litteræ fuerunt, cùm ex illis intelligam & te valere, & me à te amari; quamquam ſubiratior videaris quòd ad te rarò ſcribam, id quod non tam meâ negligentiâ quàm penuriâ Tabellariorum contigiſſe, credas velim. Nam à quo tempore à Sarmatis ad Cimbros evolavit Heros veſter, nemo ſanè fuit qui ad te tutò perferret litteras, etſi id optabam vehementer, tùm ut ſinceras tibi grates agerem, quòd officiosâ tuâ confabulatione ſciverit Magnus ille noſter Amicus, maximo me affectum fuiſſe gaudio, cùm ſummum Arctoi maris imperium, ei conceſſiſſe mihi nuntiatum eſt; tùm etiam ut tibi ſignificarem, id mihi perutile futurum, ſi me quâ ſoles beni-

gnitate apud illum amicâ commendatione profequereris.

Cæterùm perjucunda mihi profectò fuit elegantiſſima tua narratio de admirabili illâ Machinâ quâ in Coloſſicoteri tui Leonis Hyperborei conſtructione uti te dicis; & magnopere me delectat iſta contemplatio intricatiſſimæ illius tignorum, rudentum, & ferramentorum, compagis, quæ Rectoris imperio ingenioque ita ſe præſtat obſequentem: Sed pergratum mihi feceris, ſi per te certior aliquando fiam, quandônam Navis tua

Premet imperioſa ſuum mare?

Ingens enim de illâ percrebuit rumor, dignam ſcilicet fore, cui

Baltica tota lubens deſerviat ora.

Quod autem ſcribis, ſectas à te ex præſcripto Galilæi lineâ Parabolicâ ſecundùm altitudinem Trabes, ut æqualis ubique forent reſiſtentiæ, non omninò expectationi tuæ reſpondiſſe; iſtud me primùm non mediocriter commovit: tantæ enim apud me exiſtimationis vir ille ſemper fuit, ut inducere in animum nunquam poſſem, quicquam ab eo minùs ſapienter excogitatum poſſe à nobis aliquando reſarciri.

Verùm re penitùs introſpectâ, diſcuſſiſque iis propoſitionibus, quas de reſiſtentiâ Solidorum 2. lib. Mechan. conſcripſit; & quandoquidem tu me meam ea de re ſententiam rogas; ita me cenſere fateor, neque diſſimulabo deluſum ſanè iſtâ ratione fuiſſe Galilæum, ut ea trabibus utrinque fultis congruere arbitratus fuerit, quæ tignis alterâ ſui parte in murum infixis, aliâ verò liberè prominentibus convenire rectè demonſtraverat.

Etenim quando aſſerit momentum reſiſtentiæ in A (licet enim mihi affari te verbis Geometricis) Cunei ſeu Priſmatis triangularis A B G D F eſſe ad momentum ejuſdem in C, ut linea A B eſt ad lineam C B: At è contrario mo-

Fig. 1, Tab. 17.

mentum reſiſtentiæ in A Trabis, ſeu Priſmatis quadrangularis A B E D, eſſe ad momentum ejuſdem in C, ut linea C B eſt ad lineam A B: Id profectò aliter intelligi non poteſt, nequidem ex ipſo Galilæanæ demonſtrationis contextu, quàm ſi priſmata muro firmiter in punctis vel A, vel C adhærentia ſupponantur, dum Pondera ex B dependeant, quæ ſic augeantur, ut Priſmatum reſiſtentiis evadant tandem æqualia; quorum ponderum eadem tunc erit ratio, quæ linearum A B & C B.

At ſi Trabs A E ſecari intelligatur per lineam Parabolicam F N K B, unde Solidum fiat A F N B G O D, quod Cuneum Parabolicum appellare licet; tunc ipſe Galilæus infert, ex iis quæ antè demonſtraverat, momenta reſiſtentiæ in quibuſvis punctis eſſe æqualia; id eſt, (ut patet ex contextu demonſtrationis) Pondus quod pendens ex B, Solidum Parabolicum frangeret infixum in parietem in puncto A, ſeu per ſuperficiem A F D; idem etiam Pondus pendens ex eodem B, idem Solidum frangeret infixum in parietem in puncto C, ſeu per ſuperficiem C N O, & ſic de cæteris. Quod perutile futurum ait rei ædificatoriæ, ac conſtruendis præſertim navigiis, in quibus tranſtra quæ foros ſuſtinent tertiâ ponderis & molis parte multari poſſint, ſalvâ & incolumi reſiſtentiâ. *Fig. 2. Tab. 7.*

At ego (mi VV.) fateor, prorsùs ignorare me, cuinam id uſui eſſe poſſit, tranſtra enim in navibus nulla ſunt quæ utrinque non ſuffulciantur, & quorum extrema, imò & ſæpè media pars, quibuſdam rebus non inſideant firmiter incumbantque.

Sed & rei ædificatoriæ parùm id opinor ſubſidii afferet, cùm omnis ferè quæ in illa adhibetur materies, utrâque extremitate firmis quibuſdam fulcimentis ſuſtineatur; ſic in contignationibus Trabes mutulis aut parietibus, aſſeres trabibus, columen Columnis, cantherii capreolis & tranſtris, & templa cantheriis inſiſtunt: nec ullum ferè tignum reperias, cujus extremitas altera in murum infixa

ſit, altera verò liberè extrà promineat ; niſi ſi quod in ſubgrundis domorum extet ſuſtinendis trochleis, quibus pondera attollantur in Cænacula, aut in mutulis quæ Mæniana ſuffulciant.

Reſtat igitur ut, ſi eadem tigna utrinque fulta ſupponantur, incumbantque in diverſis eorum partibus illa pondera quæ trabes effringere poſſint ; Quænam inter iſta proportio intercedat, inquiramus.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. Tab. 17. Ac primùm quidem de Priſmate quadrangulari A B E fulto in A & B, notum eſt ex eodem Galilæo, momentum reſiſtentiæ in C ad momentum reſiſtentiæ in H, id eſt, minimum pondus quod incumbens in P, trabem frangeret, ad minimum pondus quod eandem frangeret in M, eſſe ut rectangulum A H B ad rectangulum A C B ; hoc enim ab ipſo demonſtratum eſt.

PROPOSITIO SECUNDA.

Fig. 2. Tab. 17. At in Priſmate triangulari ſeu Cuneo A B G D F, momenta reſiſtentiæ ſunt inter ſe, ut rectangula ſub alternis lineæ A B partibus ; id eſt, momentum in C eſt ad momentum in H, ut rectangulum ſub lineis A H, C B, ad rectangulum ſub lineis A C, B H. Eſt enim ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, compoſita ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum reſiſtentiæ Priſmatis quadrangularis ſeu trabis A E, è quâ naſcitur, in eodem puncto C, momenti reſiſtentiæ trabis in C ad momentum ejuſdem in H, & tandem momenti reſiſtentiæ trabis in H ad momentum reſiſtentiæ Cunei in eodem H. Sed ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C eſt (ex Galilæo) ut quadratum C N ad quadratum C P ſeu A F, id eſt, ut quadratum C B ad quadratum A B, (componitur enim ex rationibus partium ſolidi contentarum in ſuperficiebus

C O & C I quæ ſunt inter ſe ut ſuperficies, id eſt, propter communem altitudinem N O, I P, ut lineæ C N & C P, & ex ratione diſtantiarum actionis earumdem, quæ etiam ſunt ut eædem lineæ C N, C P:) Ratio verò momenti reſiſtentiæ priſmatis quadrangularis ſeu trabis in C, ad momentum ejuſdem in H eſt, ex eodem Galilæo, ut rectangulum A H B ad rectangulum A C B; & tandem ratio momenti reſiſtentiæ trabis in H ad momentum reſiſtentiæ Cunei in eodem H, eſt ut quadratum H M ſeu A F ad quadratum H K, id eſt, ut quadratum A B ad quadratum H B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei, ſeu Priſmatis triangularis in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componitur ex rationibus quadrati C B ad quadratum A B, rectanguli A H B ad rectangulum A C B, & quadrati A B ad quadratum H B. Sed rationes quadrati C B ad quadratum A B, & quadrati A B ad quadratum H B ſunt æquales rationi quadrati C B ad quadratum H B; & ratio quadrati C B ad quadratum H B æqualis rationibus linearum C B ad B H, plus C B ad B H; ratio verò rectanguli A H B ad rectangulum A C B, eadem eſt quæ linearum A H ad A C, plus H B ad C B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, componitur ex rationibus linearum C B ad B H, plus C B ad B H, plus A H ad A C, plus B H ad C B. Atqui rationes C B ad B H plus B H ad C B ſeſe mutuò deſtruunt: Superſunt ergo rationes A H ad A C plus C B ad B H, quæ componunt rationem rectanguli A H, C B ad rectangulum A C, B H. Unde patet propoſitum.

PROPOSITIO TERTIA.

Sic ſi trabs A B E utrinque ſecetur per diagonales A Q, Q B quæ Solidum deinceps Cuneatum A Q B T R S efficiant, occurrentes in medio trabis Q R. Momentum reſiſtentiæ duplicis illius Cunei in C, erit ad momentum ejuſdem in H, ut rectangulum ſublineis H B, B C ad rec- *Fig. 3. Tab. 17.*

tangulum ſub A C & A H. Nam ratio momenti reſiſtentiæ duplicis Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Sed demonſtrabitur, ut ſuprà, momentum Cunei in C ad momentum ejuſdem in G, eſſe in ratione compoſitâ quadrati lineæ C N ad quadratum lineæ G Q, & rectanguli A G B ad rectangulum A C B: Sed ratio quadrati C N ad quadratum G Q eadem eſt quæ quadrati G B ad quadratum G B ſeu ad rectangulum A G B: Ergo ratio momenti in C ad momentum in G, componetur ex rationibus quadrati C B ad rectangulum A G B, & rectanguli A G B ad rectangulum A C B, quæ quidem ſunt æquales rationi quadrati C B ad rectangulum A C B, vel denique rationi lineæ C B ad lineam A C. Eodem argumento demonſtrabitur momentum reſiſtentiæ Cunei in G ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, eſſe ut linea H B ad lineam A H: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ duplicis Cunei in C, ad momentum ejuſdem in H, componetur ex rationibus linearum C B ad A C, plus H B ad A H: quibus etiam componitur ratio rectanguli H B C ad rectangulum H A C. Unde patet propoſitum.

PROPOSITIO QUARTA.

Fig. 8. Tab. 17. Quod autem ad lineam Parabolicam ſpectat, quâ quadrifariam ſecari trabes poſſunt ſecundùm altitudinem, neutro tamen modo continget unquam, ut momenta reſiſtentiæ ſuperſint ubique æqualia. Etenim trabs A E eâ ratione ſecetur ut Axis ſemi-parabolæ ſit longitudo trabis A B, amplitudo verò dimidia, ſit ejuſdem altitudo A F, (planè ut ſuperior Galilæi figura docet,) unde Solidum A F N B G O D oriatur, quod Cuneum Parabolicum appellare licet: Quòdque ſi utrinque fulciatur in A & B, momentum reſiſtentiæ ut in C, erit ad momentum reſiſtentiæ ut in H, in ratione lineæ A H ad lineam A C.

Nam demonſtrabitur ut ſupra rationem momenti re-

ſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejuſdem in H, componi ex ratione quadrati CN ad quadratum HK, (id eſt, propter Parabolam lineæ CB ad lineam HB) plus ratione rectanguli AHB ad rectangulum ACB, (id eſt, ratione linearum AH ad AC) plus HB ad CB: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, componetur ex rationibus linearum CB ad HB, plus HB ad CB, plus AH ad AC; ſed ratio CB ad HB deſtruit rationem HB ad CB, eſt enim ratio æqualitatis quæ in compoſitione rationum nihil addit aut demit: Ergo ſupereſt ratio lineæ AH ad AC, cui æqualis eſt ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

Deinde ipſa Trabs AE ſecetur diagonaliter à duabus ſemi-parabolis AKQ, BNQ, quarum Axis communis ſit AB & dimidia amplitudo etiam communis GQ, quæ occurrentes in medio Trabis in Q, efficiant Solidum AKQNBTORLS, quod duplicem Cuneum Parabolicum appellare poſſumus; in quo momentum reſiſtentiæ in C erit ad momentum reſiſtentiæ in H, ut linea HB ad lineam AC. *Fig. 4. Tab. 17.*

Etenim ratio momenti reſiſtentiæ duplicis Cunei Parabolici in puncto C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in puncto H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H; jam verò ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejuſdem in G, componitur ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum reſiſtentiæ trabis AE, è quâ naſcitur, in eodem puncto C, & momenti trabis AE in C ad momentum Cunei in G. Atqui momentum Cunei in C ad momentum trabis in C, eſt ut quadratum CN ad quadratum CP ſeu GQ, id eſt, (propter Parabolam BNQ) ut linea CB ad lineam GB: Momentum verò tra-

bis in C eſt ad momentum Cunei Parabolici in G, ut quadratum G B ad rectangulum A C B, (idem enim eſt momentum reſiſtentiæ Trabis & Cunei in G,) id eſt, in ratione linearum G B ad A C, plus G B ad C B: Ergo momentum Cunei in C ad momentum ejuſdem in G, erit in ratione linearum C B ad G B, plus G B ad A C, plus G B ad C B; id eſt, ut linea G B ad A C. Eodem modo oſtendetur momentum Cunei in G, eſſe ad momentum ejuſdem in H, ut linea H B eſt ad lineam A G ſeu G B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejuſdem in H, componetur ex rationibus linearum G B ad A C & H B ad G B, id eſt, erit ut linea H B ad lineam A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEXTA.

Fig. 3. Tab. 17. Tertiò, ſi Trabs A E ſecari intelligatur lineâ Parabolicâ A K Q N B cujus vertex ſit in Q, axis Q G, & amplitudo A B, quâ quidem ſectione fiet Solidum A Q B T R S quod Parabolicum appellabitur; cujus momentum reſiſtentiæ in C eſt ad momentum reſiſtentiæ in H, ut rectangulum A C B eſt ad rectangulum A H B, vel, quod idem eſt, ut linea C N ad lineam H K.

Etenim, ut ſupra oſtenſum eſt, ratio momenti illius Parabolici in C ad momentum ejuſdem in H, componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K & rectanguli A H B ad rectangulum A C B, id eſt, ex rationibus linearum C N ad H K, plus C N ad H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed ratio lineæ C N ad H K, eadem eſt (propter Parabolam) quæ rectanguli A C B ad rectangulum A H B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componetur ex rationibus C N ad H K, plus rectanguli A C B ad rectangulum A H B, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed rationes A C B ad A H B, & A H B ad A C B ſeſe mutuò deſtruunt: Eſt ergo momentum

momentum reſiſtentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum ejuſdem in H, ut linea C N ad lineam H K, id eſt (propter Parabolam) ut rectangulum A C B eſt ad rectangulum A H B. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Et hinc vides iſtius Solidi Parabolici momenta proportionem habere inverſam momentorum Trabis è qua enatum eſt; illius enim momentum in C eſt ad momentum in H, ut rectangulum A C B ad rectangulum A H B; hujus verò è contrario momentum reſiſtentiæ in C eſt ad momentum reſiſtentiæ in puncto H, ut rectangulum A H B eſt ad rectangulum A C B.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Quartò denique ſecetur Trabs A E per ſemiparabolam F N K B, cujus axis ſit A F & dimidia amplitudo A B; exurgatque Cuneus parabolicus A F K B G O D; in quo momenta reſiſtentiæ longè intricatiorem inter ſe proportionem ſortientur quàm in reliquis. Oſtendetur enim ut ſupra momentum Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, eſſe in ratione compoſitâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B; Quæ ratio ſi referatur ad lineam B A ſeu ad baſim Cunei, eadem erit quæ compoſita rationum quadrati lineæ compoſitæ ex A C & A B ad quadratum lineæ compoſitæ ex eadem A B & A H, plus rectanguli ſub lineis A H, C B ad rectangulum ſub lineis A C, B H. Fig. 6. Tab. 173

Sit enim A Q æqualis A B, & erit ex proprietate Parabolæ C N ad H K ut rectangulum Q C B ad rectangulum Q H B, & ut quadratum C N ad quadratum H K, ſic quadratum rectanguli Q C B ad quadratum rectanguli Q H B, id eſt, ut linea Q C ad Q H, plus Q C ad Q H, plus C B ad H B, plus C B ad H B. Sed ratio rectanguli A H B ad rectangulum A C B, eadem eſt quæ ratio linearum A H ad

AC, plus HB ad CB: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componetur ex rationibus linearum QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus CB ad HB, plus AH ad AC, plus HB ad CB. Sed rationes CB ad HB, plus HB ad CB ſeſe mutuò deſtruunt; Relinquuntur ergo rationes QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus AH ad AC; quæ componunt etiam rationem quadrati QC ad quadratum QH, & rectanguli AH, CB, ad rectangulum AC, BH. Sed quadratum QC æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex AB & AC, quadratum verò QH æquale quadrato lineæ compoſitæ ex AB & AH. Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componitur ex rationibus quadrati lineæ compoſitæ ex AB & AC ad quadratum compoſitæ ex eadem AB & AH, & rectanguli ſub lineis AH, CB ad rectangulum ſub lineis AC, BH. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Atque ex iſtis omnibus patet ratio, cur nimiam quam in Galilæum habebas fiduciam experimenta tua deluſerint. Tantum enim abeſt ut illa ſectio Parabolica, quocumque tandem modo trabibus ſecundùm altitudinem adhibeatur, æquet in illis utrinque fultis momenta reſiſtentiæ; quin illa potiùs in infinitum dimovere poſſit atque diducere; etiamſi id ſemper veriſſimum ſit tertiam ponderis & molis partem per Parabolas in trabe reſecari.

PROPOSITIO OCTAVA.

Fig. 7. Tab 17. Sed nec iſta momentorum æqualium proprietas ſectioni hyperbolicæ conveniet. Nam ſi trabs AE ſecetur primò per ſemi-hyperbolam ANKR ſub tranſversâ diametro QA, Axe AB, & amplitudine BR, unde Cuneus hyperbolicus oriatur BANRELSG. Erit momentum

reſiſtentiæ in C ad momentum in H, ut eſt rectangulum ſub Q C & H B ad rectangulum ſub Q H & C B. Nam, ut ſupra, demonſtrabitur momentum in C ad momentum in H eſſe in ratione compoſita quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B. Sed ex proprietate hyperboles quadratum C N eſt ad quadratum H K ut rectangulum Q C A ad rectangulum Q H A: Ergo momentum eſt ad momentum in ratione compoſita rectangulorum Q C A ad Q H A & A H B ad A C B. Sed ratio rectanguli Q C A ad Q H A eadem eſt quæ linearum Q C ad Q H, & A C ad A H; ratio verò rectanguli A H B ad A C B eadem eſt quæ linearum A H ad C A, plus H B ad C B: Et ratio A C ad A H deſtruit rationem A H ad C A: Ergo momentum reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, eſt in ratione compoſita linearum Q C ad Q H, plus H B ad C B; Quæ quidem eſt ratio rectanguli Q C, H B ad rectangulum Q H, B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO NONA.

Si verò idem Priſma A E ſecetur per duas ſemi-hyperbolas contrariè poſitas A K Q, B N Q, quarum axis communis A B, amplitudo eadem G Q, & tranſverſæ diametri æquales A V, B X, quæ ſe in trabis medio Q ſecantes, Solidum in illa efficiant A K Q N B T R S deinceps Cuneatum hyperbolicum. Idem prorſus eveniet quod ſupra, eritque momentum reſiſtentiæ in C ad momentum reſiſtentiæ in H, ut eſt rectangulum ſub X C & H B ad rectangulum ſub V H & A C. Eſt enim ratio momenti reſiſtentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, compoſita ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Et ratio momenti in C ad momentum in G componitur ex rationibus rectanguli A G B ad rectangulum A C B, plus quadrati C N ad quadratum G Q, id Fig. 8. Tab. 17.

eſt, (ex proprietate hyperboles) rectanguli X C B ad rectangulum X G B. Sed ratio rectanguli A G B ad rectangulum A C B, eadem eſt quæ linearum A G ad A C, plus G B ad C B; Ratio vero rectanguli X C B ad rectangulum X G B, eadem quæ linearum X C ad X G, plus C B ad G B: Et ratio G B ad C B deſtruit rationem C B ad G B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ in C ad momentum in G, componetur ex rationibus A G ad A C, plus X C ad X G, quibus etiam componitur ratio rectanguli X C, A G ad rectangulum X G, A C. Eodem modo demonſtrabitur rationem momenti reſiſtentiæ in G ad momentum reſiſtentiæ in H, eandem eſſe quæ rectanguli V G, B H vel X G, B H ad rectangulum V H, A G: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componetur ex rationibus rectangulorum X C, A G ad X G, A C, plus X G, B H ad V H, A G. Sed iſta rationum compoſitio eadem eſt quæ compoſitio rationum rectangulorum X C, A G ad V H, A G, plus X G, B H ad X G, A C, id eſt, (propter communes altitudines A G & X G) eadem quæ compoſitio rationum linearum X C ad V H, plus B H ad A C: Ergo momentum reſiſtentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, eſt in ratione compoſita ex rationibus linearum X C ad V H & B H ad A C, id eſt, rectanguli X C, B H ad V H, A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMA.

Fig. 2. Tab. 18. Quod ſi Trabs A E ſecetur per integram hyperbolam A K Q N B, cujus axis ſit G Q, tranſverſa diameter Q V, & oppoſita ſectio I V Z; erit adhuc intricatior ratio momenti reſiſtentiæ Solidi hyperbolici A Q B D R Y in C ad momentum ejuſdem in H. Si enim producantur lineæ C N, H K, donec occurrant oppoſitæ ſectioni in Z & I; demonſtrabitur rationem momenti in C ad momentum in H,

eandem esse quæ rectanguli sub lineis I H, C N ad rectangulum sub lineis Z C, H K. Nam, ut supra, ostenditur rationem momentorum componi ex rationibus quadratorum C N ad H K, plus rectangulorum A H B ad A C B. Sed ex proprietate hyperboles rectangulum A H B ad rectangulum A C B, est ut rectangulum I H K ad rectangulum Z C N: Erit ergo ratio momenti in C ad momentum in H composita ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli I H K ad rectangulum Z C N. Rursùs demonstratum est ab aliis idem esse compositum rationum quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli I H K ad rectangulum Z C N, quod compositum rationum quadrati C N ad rectangulum Z C N, id est, lineæ C N ad lineam Z C, & rectanguli I H K ad quadratum H K, id est, lineæ I H ad lineam H K: Est ergo ratio momenti resistentiæ Soliai hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex ratione lineæ C N ad Z C, plus ratione lineæ I H ad H K; quibus etiam componitur ratio rectanguli I H, C N ad rectangulum sub lineis Z C, H K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Denique, si Trabs A E per semihyperbolam F K N B secetur, cujus Axis A F, transversa diameter F V, & opposita sectio V I Z, oriaturque alter Cuneus hyperbolicus A F N B G L D; erit intricatissima ratio momentorum resistentiæ ejusdem in diversis punctis C & H. Nam si extendantur lineæ C N, H K, ut in superiori propositione, donec occurrant oppositæ sectioni in Z & I, erit ratio momenti resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, composita ex rationibus rectanguli sub lineis I H & C N ad rectangulum sub lineis Z C, H K, plus rectanguli sub compositâ ex tota A B & parte A C in lineam A H, ad rectangulum sub compositâ ex eadem A B & parte A H in lineam A C. Sit A Q æqualis A B ostende- *Fig. 2. Tab. 18.*

tur; ut ſuprà, momentum reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejuſdem in H, eſſe in compoſitâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed ratio quadrati C N ad quadratum H K componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum A F, & quadrati A F ad quadratum H K; ratio verò quadrati C N ad quadratum A F componitur rursùs ex ratione quadrati C N ad rectangulum Z C N (id eſt, propter C N communem altitudinem,) lineæ C N ad lineam Z C, plus ratione rectanguli Z C N ad rectangulum Q C B, id eſt (ex proprietate hyperboles) rectanguli V A F ad quadratum A B, plus ratione rectanguli Q C B ad quadratum A B, plus ratione quadrati A B ad rectangulum V A F, & tandem plus ratione rectanguli V A F ad quadratum A F, id eſt, (propter A F communem altitudinem) lineæ V A ad lineam A F: Atqui ratio rectanguli V A F ad quadratum A B deſtruit rationem quadrati A B ad rectangulum V A F. Supereſt ergo ut ratio quadrati C N ad quadratum A F componatur ex rationibus lineæ C N ad lineam C Z, plus rectanguli Q C B ad quadratum A B, plus lineæ V A ad lineam A F; quibus etiam componuntur rationes rectanguli V A, C N ad rectangulum C Z, A F & rectanguli Q C B ad quadratum A B. Eodem argumento demonſtrabitur rationem quadrati A F ad quadratum H K componi ex ratione rectanguli I H, A F ad rectangulum V A, H K, plus ratione quadrati A B ad rectangulum Q H B: Ergo ratio quadrati C N ad quadratum H K componetur ex ratione rectangulorum V A, C N ad C Z, A F, plus Q C B ad quadratum A B, plus quadrati A B ad rectangulum Q H B, plus rectanguli I H, A F ad V A, H K; id eſt, ex rationibus rectangulorum V A, C N ad C Z, A F, plus Q C B ad Q H B, plus I H, A F ad V A, H K. Sed quod exurgit ex compoſitione rationum rectangulorum V A, C N ad C Z, A F, plus I H, A F ad V A, H K, æquale eſt ei quod exurgit ex compoſitione rationum rec-

tangulorum V A, C N ad V A, H K, id eſt, (propter V A communem altitudinem) lineæ C N ad lineam H K, plus I H, A F ad C Z, A F, id eſt, (propter A F communem altitudinem) lineæ I H ad lineam C Z, quæ quidem conficiunt rationem rectanguli I H, C N ad rectangulum C Z, H K: Ergo ratio quadrati C N ad quadratum H K componetur ex rationibus rectangulorum I H, C N ad C Z, H K, plus Q C B ad Q H B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejuſdem in H componetur ex rationibus rectangulorum I H, C N ad C Z, H K, plus Q C B ad Q H B, plus A H B ad A C B: Sed ratio rectanguli Q C B ad Q H B eadem eſt quæ linearum Q C ad Q H, plus C B ad H B; ratio verò rectanguli A H B ad A C B eadem quæ linearum A H ad A C, plus H B ad C B. Quæ quidem ratio H B ad C B deſtruit rationem linearum C B ad H B. Eſt ergo momentum reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejuſdem in H, in ratione compoſitâ rationum rectanguli I H, C N ad rectangulum C Z, H K, plus linearum Q C ad Q H, plus A H ad A C, (id eſt, rectanguli Q C, A H ad rectangulum Q H, A C,) id eſt, rectanguli ſub lineâ compoſitâ ex A B & A C in A H, ad rectangulum ſub compoſitâ ex eadem A B & A H in lineam A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Neque etiam iſta momentorum æqualitas in Trabe, per quadrantem Circuli aut Ellipſeos ſectâ, reperietur. Nam ſi ſub ſemidiametris A F, A B quadrans Circuli aut Ellipſeos F N K B deſcribatur, qui ſecans Trabem A E producat Cuneum circularem aut ellipticum A F N K B G O D, ſitque tota diameter B Q. Facilè oſtendetur momentum reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, eſſe ut rectangulum ſub compoſitâ ex totâ A B & ex parte A C in A H, ad rectangulum ſub compoſitâ ex totâ A B & ex parte A H in A C. Nam ratio momenti reſiſtentiæ Cunei elli- Fig. 3. Tab. 18.

ptici ſeu circularis in puncto C ad momentùm reſiſtentiæ ejuſdem in puncto H, componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B. Sed propter Circulum aut Ellipſim quadratum C N eſt ad quadratum H K ut rectangulum Q C B ad rectangulum Q H B : Ergo ratio momenti reſiſtentiæ in C ad momentum in H, componitur ex rationibus rectanguli Q C B ad rectangulum Q H B, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B, id eſt, (uti demonſtratum eſt ab aliis) ex rationibus rectanguli Q C B ad rectangulum A C B, plus rectanguli A H B ad rectangulum Q H B ; id eſt, (propter communes altitudines C B & H B) ex rationibus linearum A H ad Q H, plus Q C ad A C ; quæ quidem faciunt rationem rectanguli A H, Q C ad rectangulum A C, Q H, ſeu rectanguli ſub A H & compoſitâ ex totâ A B & parte A C, ad rectangulum ſub A C & compoſitâ ex totâ A B & parte A H. Eſt ergo momentum reſiſtentiæ Cunei circularis aut elliptici in C ad momentum ejuſdem in H, ut rectangulum ſub compoſitâ ex A B & A C in A H ad rectangulum ſub compoſitâ ex A B & A H in A C. Quod erat demonſtrandum.

Nunc verò (mi VV.) quanti æſtimâris, ſi quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis & molis portio auferatur, ſed illa ſaltem non exigua, momenta verò reſiſtentiæ ubique in reſiduo ſuperſint æqualia? Illud puto, gratiſſimum tibi erit, & tibi in mechanicis atque organicis aſſiduè verſanti, opis haud omninò contemnendæ. Sed quantò acceptius id erit tibi atque jucundius, quòd à viro tui amantiſſimo, & qui te magnopere colit, id continget? Enimverò iis quæ in nos amici conferunt beneficiis, nexu duplici nos obligari par eſt atque obſtringi

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

Age igitur, & quod ſectioni parabolicæ, imò & hyperbolicæ, atque quadranti circuli aut ellipſeos, denegavimus ;

mus ; circulari profectò aut ellipticæ meritò concedamus: iſtæ enim ſectiones id prorsùs efficient, quod præſtare Parabolam Galilæus perperam aſſeruerat.

Nam ſi duabus lineis A G vel G B & G Q tanquam ſemidiametris, deſcribatur ſemicirculus A Q B, ſi eæ ſint æquales ; vel ſemiellipſis, ſi ſint inæquales ; & per hanc vel illam Trabs A E ſecundùm altitudinem ita ſecetur, ut fiat Solidum circulare, vel ellipticum A Q B T R S : Ejus ſanè momenta reſiſtentiæ erunt ubique æqualia, & quod pondus frangit in C Solidum utrinque fultum, illud etiam idem rumpet in H. Etenim momentum reſiſtentiæ in C Solidi ſive circularis ſive elliptici, eſt ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, in ratione compoſitâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B : Sed propter Circulum aut Ellipſim quadratum C N eſt ad quadratum H K, ut rectangulum A C B eſt ad rectangulum A H B : Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Solidi in C ad momentum ejuſdem in H, componetur ex rationibus rectanguli A C B ad rectangulum A H B, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B : Sed iſtæ rationes faciunt rationem æqualitatis : Ergo momenta in C & H erunt æqualia. Et hoc in omnibus Solidi punctis concludetur, unde patet ubique propoſitum. *Fig. 4. 5. Tab. 18.*

Sic (mi VV.) petitioni tuæ ſatisfeciſſe me puto, niſi quòd hæc, quam ad te paucis verbis ſcribere cogitaveram, in ingentem ac penè faſtidioſam molem, Epiſtola creverit. Sed hæc omnia ità exarare oportuit, tùm ut rem tibi gratam faciam, ſi quidpiam boni tibi communicaverim, tùm etiam ut habeas, quòd amicè me admoneas, ſi quid minùs cautè ſcripſerim. Quippe non mirum profectò fuerit, iiſdem me in grumis ſcrupiſque collabi, in quos ipſe Galilæus impegerit. Quare etiam atque etiam te rogo, ad me quamprimùm reſcribe quid ſentias, factis præſertim eâ quâ ſoles ſedulitate atque ſolertiâ experimentis. Egò verò non committam poſthâc ut de meâ ne-

gligentiâ conqueraris. Vale. Datum Farræ Viromanduorum pridie Idus Sextiles A. D. MDC. LVII.

SECOND DISCOURS.

OU

LETTRE AU SIEUR B.

Pour la réſolution de ſes doutes ſur les propoſitions du premier Diſcours.

MOnſieur. Je vous ſuis parfaitement obligé du ſoin que vous avez pris, de me donner part des remarques qui ont été faites ſur une Lettre, que j'écrivis il y a quelques années à un de mes Amis en Suede, & dont je vous avois laiſſé une copie, ſur leſquelles il eſt bien raiſonnable que je vous éclairciſſe. Et pour y répondre par ordre & ne vous y laiſſer aucun ſujet de douter, je veux premierement vous faire reſſouvenir de ce que vous m'avez fait la grace de marquer, ou faire marquer par vos amis, à la marge de mon écrit, à côté des choſes que je n'y avois pas aſſez clairement expliquées.

I. *Fig. 1. Tab. 17.* La premiere des remarques eſt ſur la ſeconde Propoſition, où je dis que les momens de la réſiſtance du Coin ou Priſme triangulaire F A B G, que je ſuppoſe être ſoûtenu ſur ſes deux extrémitez A & B, ſont entr'eux, comme les rectangles ſous les parties alternes de la baſe A B; c'eſt-à-dire, que le moment de la réſiſtance en C eſt au moment en H, comme le rectangle des parties A H, C B eſt au rectangle des parties A C, B H. Et pour le démontrer, je me ſers de ces termes, que je rapporte en la Langue qu'ils ſont écrits, parce que les notes ſont auſſi Latines: *Sed ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C, eſt ex Galilæo, ut quadratum C N ad*

quadratum C P ſeu A F, (id eſt, ut quadratum C B ad quadratum A B,) componitur enim ex rationibus partium Solidi

✠

contentarum in ſuperficiebus C O & C I, quæ ſunt inter ſe ut ſuperficies, ideſt, (propter communem altitudinem N O, I P,) ut lineæ C N, C P, & ex ratione diſtantiarum actionis earumdem, quæ etiam ſunt ut eædem lineæ C N & C P. Sur quoi dans le texte l'on a tiré des lignes, & fait des petites Croix, ainſi qu'il ſe voit ici. Et vis-à-vis de la premiere il eſt écrit à la marge, *Hoc falſum, eſt enim ut C N ad C P ſeu A F, ex Galilæo.* Et à l'endroit de la ſeconde, *Hoc non conſideravit Galilæus, nec debet conſiderari in reſiſtentiâ.* Un peu plus bas, où je dis ſur la même Propoſition : *Et tandem ratio momenti reſiſtentiæ Trabis in H ad momentum reſiſtentiæ Cunei in eodem H, eſt ut quadratum H M ſeu A F ad quadratum H K,* il y a à la marge, *Falſum ob eandem rationem.*

La ſeconde eſt ſur la troiſiéme Propoſition, où je dis : II. *Sed demonſtrabitur ut ſuprà momentum Cunei in C ad momentum ejuſdem in G, eſſe in ratione compoſitâ quadrati lineæ C N ad quadratum lineæ G Q, & rectanguli, A G B ad rectangulum A C B.* Il y a à coté, *Falſum, ſunt enim ut lineæ ut ſuprà, & ſic in ſequentibus, quod ubique notandum. Hoc ſolummodò verum eſſet, ſi non ſolùm trabs minueretur ſecundùm unam dimenſionem, ut in caſibus Galilæi & cenſoris, ut patet ex omnibus ejus figuris, ſed ſecundùm duas dimenſiones : At nullus hunc caſum unquam inquiſivit.* Fig. 3. Tab. 17.

Dans la quatriéme Propoſition, où j'explique la difference des momens de la réſiſtance d'un Solide, que j'appelle Coin Parabolique, il y a à la marge : *Hæc & ſequentia, in quibus aut dimidium, aut quadrans figuræ datur Trabi, ſuperflua ſunt ; cum ſatis pateat, quandoquidem trabs ex utraque extremitate ſuſtinetur æqualiter, debere ex utraque parte trabem, figuram uniformem habere, non verò ex* III. Fig. 2. Tab. 17.

unà craſſam, ex aliâ tenuem. Quare quæ de dimidiâ Parabolâ & Hyperbolâ, quæ de quadrante Circuli aut Ellipſeos adducit, inutilia ſunt; præterquamquod eodem ſemper Paralogiſmo omnia laborant.

IV. Fig. 5. Tab. 17. Dans la ſixiéme Propoſition, où il eſt parlé des momens de la réſiſtance d'un Solide, que j'appelle Parabolique, il y a à côté : *Hæc figura ſuppoſitis ſupponendis eſt ea quam aſſignare debebant & Galilæus & Cenſor, abſtrahendo ſcilicet à gravitate trabis, ut in hac omni inquiſitione hypotheticà abſtrahi debet, alioquin fit Paralogiſmus. Multa notanda forent pro reductione ad praxim, ſi quis hæc aliter quàm hypotheticè vellet ſumere, ſecundùm enim materiæ diverſitatem pleraque falſa invenirentur, & vix ullius uſus hoc eſſe poteſt, niſi in navibus, & aliis machinis, in quibus levitas conſideranda foret.*

V. A la fin de la douziéme Propoſition, où je dis : *Nunc verò (mi VV.) quanti æſtimaris, ſi quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis aut molis portio auferatur, ſed illa ſaltem non exigua.* L'on a écrit à côté : *Tertia pars è verâ figurâ aufertur.*

VI. Tab. 18. Fig. 45. Enfin, lors que je dis dans la derniere Propoſition, que *Momentum in C ſive Elliptici Circularis Solidi, eſt ad momentum reſiſtentiæ in H, in ratione compoſitâ quadrati C N ad quadratum H K & rectanguli A H B ad rectangulum A C B*, il y a encore à la marge, *Falſum.* Et où je dis enſuite : *Ergo momenta in C & H erunt æqualia*, il y a encore, *falſum.*

Voilà, Monſieur, les Obſervations que j'ai trouvées dans l'écrit que vous m'avez renvoyé, & que j'ai marquées par nombres, afin de les ſçavoir plus facilement diſtinguer l'une de l'autre dans le diſcours. Elles ſont véritablement judicieuſes & importantes, & ſi vrai-ſemblables, qu'à moins de s'y appliquer ſérieuſement, & d'en faire une exacte diſcuſſion, il eſt mal-aiſé de les réſoudre, & de ſe développer de l'embarras qu'elles vous ont produit.

Pour les traiter avec quelque ordre, il paroît que la 1. 2. 5. & 6. ſont celles qui contiennent le nœud de la difficulté, ſur leſquelles il faudra par conſéquent que je m'étende un peu davantage que ſur les autres. Car pour la 3. où l'on dit que toutes les Propoſitions où je parle des Poutres, qui ne reçoivent que la moitié ou le quart de la figure, ſont ſuperfluës, puis que l'on voit aſſez que la Poutre étant ſoûtenuë par ſes deux bouts, doit avoir une figure uniforme, & n'être pas groſſe par une extrémité, & menuë par l'autre; en ſorte que tout ce que j'ai rapporté de la demy-Parabole, de la demi-Hyperbole, & du quart de Cercle, ou d'Ellipſe, eſt abſolument inutile.

Il me ſemble que j'ai quelque droit de dire, que je ne vois pas bien qu'il paroiſſe ſi clairement comme vous dites, qu'une Poutre ſoutenuë des deux bouts doive être de figure uniforme, puis, qu'à mon avis, deux murs ſe peuvent rencontrer d'une inégale épaiſſeur, & dont l'un ſeroit aſſez fort pour porter le plus gros bout d'une Poutre inégale; & l'autre plus foible ne pourroit ſouffrir le poids que d'un plus alegé: Et la queſtion pourroit cependant être faite ſur cette hypotheſe; Quels ſeroient les momens de la réſiſtance de cette Poutre, ſelon la difference de ſes parties?

Outre qu'ayant été propoſé ſous une de ces figures par M. Galilée, ſçavoir ſous celle de la demi-Parabole, que j'ai appellée Coin Parabolique; il étoit bien juſte que je parlaſſe des veritables proportions des momens de la réſiſtance de ce Solide, pour faire voir en quoi, & de combien il s'étoit équivoqué dans celles qu'il lui avoit attribuées.

Joint qu'enfin, ſi nous en croyons les anciens Maîtres du Métier, c'eſt faire injure à la dignité des Sciences Speculatives, que de ne meſurer leur eſtime qu'à l'utilité que les Ouvriers en reçoivent, quand ils appliquent à la matiere, & avec les imperfections qui l'accompagnent in-

ſéparablement, la ſubtilité de leur doctrine & de leurs démonſtrations.

Et pour la 4e remarque où vous dites que le Solide Parabolique, duquel je parle dans ma 6e Propoſition, eſt celui que nous devions avoir propoſé & M. Galilée & moi; je n'ai rien à y répondre, puiſqu'il paroît que j'y ai ſatisfait de ma part en le conſiderant, & que je ne ſuis pas reſponſable des faits de M. Galilée. Que ſi l'on dit que nous le devions rapporter tout ſeul, ſans parler aucunement des autres; je me remets à ce que je viens de dire ſur la 3e Obſervation, & à ce qui ſera ci-deſſous expliqué ſur toutes les autres.

L'on dit enſuite qu'il faut faire abſtraction du propre poids du Solide dans toutes mes Propoſitions, comme dans celle de M. Galilée, puis qu'autrement il y auroit Paralogiſme. J'en demeure d'accord auſſi-bien que M. Galilée, qui s'en eſt aſſez fait entendre avant que d'entrer en cette matiere, quand il dit: *Quello che ricerca più ſottile ſpecolazione è quando aſtraendo d'alla gravità propria di tali Solidi, ci fuſſe propoſto di dover inveſtigare, ſe quella forza ò peſo che applicato al mezo d'un Cilindro ſoſtenuto nelle eſtremità, baſterebbe à romperlo, potrebbe far l'iſteſſo applicato in qualſivoglia altro luogo più vicino all'una che all'altra eſtremità.* Et comme je n'ai fait que marcher ſur ſes pas, j'ai crû que je pouvois librement ſuppoſer toute ſa doctrine, ſans être obligé de remplir mon papier de ce qui ſe trouvoit pleinement expliqué dans ſon Livre.

Enfin, ſur ce que l'on ajoûte qu'il y auroit beaucoup de choſes à remarquer, ſi l'on vouloit mettre ces Propoſitions en pratique, & que la diverſité de la matiere y feroit trouver beaucoup de déconte: Comme c'eſt une plainte qui s'eſt faite de tout temps contre les Propoſitions Mathematiques, que l'imbecillité de la matiere ne peut jamais recevoir ni ſouffrir avec exactitude; je me tiens à ce qui y a été répondu par les Grands Hommes des

ſiécles paſſez, & à ce que l'expérience nous enſeigne de la perfection des Arts, qui n'ont d'excellence, qu'autant que leurs Ouvrages ſe trouvent approcher de plus près de la beauté des Idées, que les démonſtrations de la Théorie ont produites.

Je dirai ſeulement, ſur ce que l'on a écrit, que toutes ces méditations ne peuvent gueres avoir d'autre uſage qu'aux Navires, & aux autres machines mobiles, où l'on recherche la légéreté : Que cela n'eſt pas tout-à-fait le ſentiment de quelques perſonnes aſſez entenduës au Bâtiment, à qui je me ſouviens d'avoir oüi dire, que ſi ce n'étoit le ver qui ronge le bois, ils aimeroient beaucoup mieux ſe ſervir de Poutres de ſapin, dans les lieux où l'humidité n'eſt pas à craindre, que de celles de Cheſne, ſeulement parce que celles-là ne chargent pas tant les murailles que celles-ci.

Toutes les autres remarques, qui contiennent en effet le nœud de la difficulté, & qui ſont quaſi toutes d'un même ſens, & fondées ſur un même principe, diſent que les momens de la réſiſtance en un même point, tant de la Poutre que du Solide qui lui eſt inſcrit ſelon ſa hauteur, ne ſont pas entr'eux, comme les Quarrez des lignes perpendiculaires à la baſe commune, compriſes & en l'une & en l'autre, ainſi que je l'ai rapporté de M. Galilée, mais qu'ils ſont ſeulement dans la raiſon de ces mêmes lignes; c'eſt-à-dire, que les momens de la Poutre & du Solide Parabolique, par exemple en C, ne ſont pas, ſelon Galilée, comme les Quarrez des lignes C P & C N, mais ſeulement comme ces mêmes lignes C P & C N : Puiſque M. Galilée n'y a aucunement conſideré la quantité des parties, qui ſe doivent ſéparer l'une de l'autre, dans les ſurfaces C I & C O; & qu'en cette ſorte de réſiſtances, on n'y doit avoir aucun égard. Qu'au reſte, cela ſeroit bon, s'il ſe faiſoit diminution de plus d'une dimenſion dans ces Solides, & non pas d'une ſeule, comme il paroît dans

Fig. 5. Tab. 27.

toutes mes figures, perſonne n'ayant jamais recherché ce qui arriveroit en l'autre cas.

Sur quoi je dois vous dire premierement, que quelque ſoin que j'aye pris de relire mon Galilée, je n'ai pas pû comprendre par aucun de ſes raiſonnemens, qu'il ait jamais eu la penſée (non pas même dans l'hypotheſe, que ſes Solides ſoient fichez par un bout, & que le poids pende librement à l'autre) de dire que les momens de la réſiſtance de la Poutre & d'un Solide inſcrit, fuſſent en un même point entr'eux, comme les lignes perpendiculaires à la baſe commune, compriſes en l'un & en l'autre; puiſque dans la démonſtration qu'il fait du Priſme triangulaire, il dit bien que le moment de ſa réſiſtance en C eſt au moment de ſa réſiſtance en A, comme la ligne C B eſt à la ligne B A, ou comme C N eſt à A F ou C P; mais il ne dit pas que le moment de la réſiſtance du Priſme triangulaire en C, ſoit au moment de la réſiſtance de la Poutre A E au même point C, comme la ligne C N eſt à la ligne C P.

Fig. 1. Tab. 17.

Et dans celle qu'il rapporte du Solide Parabolique, il n'a jamais voulu que le moment de ſa réſiſtance, par exemple en C, ſoit au moment de la réſiſtance de la Poutre A E au même point C, comme la ligne C N eſt à la ligne C P: mais au contraire, que le moment de la réſiſtance du Coin Parabolique en C, eſt à ſon moment en A, comme le quarré de C N eſt au quarré de A F ou C P; puiſqu'il ne peut pas autrement démontrer que les momens de la réſiſtance en A & C, & par tout ailleurs, ſont égaux, s'il ne ſuppoſe que la Compoſition des raiſons de la réſiſtance de A D & C O, & de leurs diſtances, (qui ſont entre elles comme les moitiez des lignes A F & C N) eſt égale à la Compoſition des raiſons de la même puiſſance pendante en B, & agiſſante tantôt avec la diſtance A B, & tantôt avec la diſtance C B, leſquelles ſont entr'elles comme les quarrez des lignes A F ou C P & C N.

Fig. 2. Tab. 17.

Je dis même dans l'Hypotheſe de M. Galilée, qui veut par

par ſa démonſtration qu'en l'une & en l'autre des Figures le Solide ſoit fiché dans la muraille par un bout, tantôt en A & tantôt en C; & que l'autre extrémité B, à laquelle le poids eſt attaché, ſoit toûjours libre en l'air, ſans être aucunement ſoûtenuë. Bien loin de l'avoir dit dans l'autre ſuppoſition, qui veut que les Solides ſoient ſoûtenus par les deux extrêmes, & que la puiſſance agiſſe entr'eux, ou qu'ils ſoient appuyez en quelque point entre leſdits extrêmes, ſur leſquels la puiſſance faſſe ſon effort: Et dans cette ſuppoſition il n'a jamais rien dit d'approchant ſur cette matiere.

Je ne ſçais pas auſſi ſur quel fondement l'on a pû dire que M. Galilée n'a jamais conſideré dans la réſiſtance les parties qui ſe doivent ſéparer l'une de l'autre dans les ſurfaces C I & C O, puiſqu'il n'y a rien qu'il ait plus particulierement expliqué.

Et il faut à ce propos que je vous avertiſſe en paſſant d'une difficulté qui ſe rencontre dans ſon premier Livre, où voulant enſeigner une maniere tout-à-fait ingénieuſe pour ſçavoir la meſure de la plus grande longueur à laquelle les Verges ou Cylindres de toutes ſortes de groſſeur & de matiére, ſe peuvent étendre ſans ſe rompre d'eux-mêmes.

Pigliſi (dit-il) *per eſſempio un fil di rame di qualſivoglia groſſezza é lunghezza, è fermato un de i ſuoi capi ad alto, ſi vadia aggiungnendo all' altro maggior è maggior pezo, ſi che finalmente ſi ſtrappi, è ſia il peſo maſſimo che poteſſe ſoſtenere, V. G. cinquanta libre. E' manifeſto che cinquanta libre di rame oltre al proprio peſo, che ſia per eſſempio un ottavo d'oncia, tirato in filo di tal groſſezza, ſarebbe la lunghezza maſſima del filo the ſe ſteſſo poteſſe reggere. Miſuriſi poi quanto era lungo il filo che ſi ſtrappò, è ſia V. G. un braccio. E' perche peſo un ottavo d'oncia, é reſſe ſe ſteſſo è cinquanta libre appreſſo che ſono ottavi d'oncia quattro mila ottocento: Diremo tutti i fili di rame di qualunche ſia la lor groſſezza, poterſi*

reggere ſino à la lunghezza di quattro mila ottocento è un braccio, è nò più.

La difficulté conſiſte, en ce qu'il ne ſe voit pas bien clairement qu'il ait dû, d'une expérience ſinguliere, ſur un fil d'une groſſeur déterminée, tirer une conſéquence ſi générale qu'il a faite par ces mots, *Diremo tutti i fili di rame*, &c. Ce qui eſt pourtant véritable, parce que tous ces fils ou Cylindres étant de même longueur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, & partant les poids qui ſont entr'eux comme les Cylindres ſeront en la même raiſon de leurs baſes; mais les réſiſtances ſont auſſi en même proportion des baſes; donc les poids & les réſiſtances ſeront en même raiſon, & les poids ſeront à leur réſiſtance, chacune à la ſienne, en même proportion : Mais l'un de ces poids eſt ſuppoſé égal à ſa réſiſtance par la conſtruction; Donc tous les autres poids ſeront auſſi égaux à la réſiſtance de leurs Cylindres, priſe en la maniere qu'ils ſe répondent l'un à l'autre.

Mais laiſſant ce diſcours, qui ſera beaucoup mieux éclairci dans la ſuite, il faut maintenant venir au fait, & vous bien faire connoître deux choſes; la premiere, que j'ai eu juſte ſujet de dire que M. Galilée a pû s'être laiſſé ſurprendre, non pas en démontrant, ſelon ſon hypotheſe, que les momens de la réſiſtance de ſon Solide Parabolique en tous ſes points ſont égaux, & que ce qui reſte de la Poutre après que ce Solide en eſt ôté, fait juſtement la troiſiéme partie de la Poutre; mais en ce qu'ayant fort bien démontré l'une & l'autre de ces deux proprietez dans un Solide fiché par un bout & l'autre libre, il a crû qu'il pouvoit en attribuer la premiere au même Solide lorſqu'il ſeroit ſoûtenu par ces deux bouts.

L'autre, que j'ai légitimement démontré les veritables proprietez des Solides, que j'ai conſiderez dans mon Livre, & que je n'ai fait aucun Paralogiſme, quand j'ai ſuppoſé de la doctrine de M. Galilée, que les momens de

la réſiſtance du Solide inſcrit & de la Poutre en un même point, lorſque l'un & l'autre étoient ſoûtenus par les deux bouts, ſont entr'eux comme les quarrez des lignes perpendiculaires à leur baſe commune, compriſes en l'un & en l'autre.

Et pour vous ôter tout ſcrupule ſur ces deux choſes, il faudra vous rapporter pluſieurs paſſages du Livre de M. Galilée, afin que vous n'ayez pas la peine de les y aller chercher, & vous entretenir un peu au long de ſa doctrine, & de ſes Propoſitions ſur le ſujet preſent de la réſiſtance des Solides.

Il tire donc ſes premieres idées de la confuſion où ſe trouvent ordinairement les Ouvriers, qui ne rencontrant pas dans les grandes Machines, des effets proportionnez à ceux que les petites Machines, ſemblables aux premieres, ont accoûtumé de produire; & voyant au contraire que les plus vaſtes, & celles, dont les piéces qui la compoſent, ſont de plus grande étenduë, ont beaucoup moins de force pour réſiſter aux inſultes des accidens du dehors, à proportion que les plus petites & celles dont les membres ſont plus reſſerrez, quoiqu'ils ſoient entre eux en la même raiſon que les parties des plus grandes; ils en rapportent la cauſe à l'inégalité de la matiere, & à l'imperfection de l'Art, comme ſi des cauſes ſi foibles pouvoient ſuffire à la production des effets ſi differens, & d'une ſi énorme difformité.

Mais M. Galilée conſiderant la choſe d'une autre maniere, & après une méditation, comme il dit de pluſieurs années, a cru à la fin en avoir trouvé les veritables raiſons; & argumentant à la façon des Géométres, & ſur les anciens principes de la Méchanique, il eſt le premier qui ait fait connoître, que les réſiſtances des Solides, c'eſt-à-dire, la force qu'ils ont d'eux-mêmes à ſoûtenir leur propre poids, & réſiſter à la violence des coups du dehors, ne marchoient pas entr'elles avec les mêmes proportions

que les gravitez des mêmes Solides : & que celles-ci s'augmentant en la raiſon, & à meſure que les corps peſans d'une même matiere s'agrandiſſent ; la réſiſtance au contraire ſuivoit une bien moindre proportion, & elle ſe trouvoit beaucoup affoiblie dans les grands corps, & bien moins capable de ſoûtenir des efforts, qu'elle n'étoit à proportion dans les moindres.

Je ſerois trop long, ſi je voulois vous raconter tout ce qu'il a admirablement écrit ſur cette matiere : auſſi je me contenterai de vous rapporter ce qui fait à mon ſujet, & vous dire premierement ; Que ſuppoſant, par exemple, un Cylindre attaché en haut par un de ſes bouts, & un poids pendant à l'autre, qui ſoit petit à petit augmenté de telle ſorte qu'il devienne à la fin aſſez fort pour rompre le Cylindre : Ce poids que j'ai ſuppoſé le plus grand de tous ceux que le Cylindre puiſſe ſoûtenir ſans ſe rompre, joint au propre poids du Cylindre, s'appelle par M. Gali-
A. lée, *La meſure de la réſiſtance abſoluë de ce Cylindre*, laquelle conſiſte en la tenacité & attachement des parties contenuës dans les ſurfaces qui ſe doivent ſéparer l'une de l'autre par la rupture, & en l'effort que chacune fait en particulier pour demeurer liée & adhérente à ſes voiſines.

Enſuite il dit, que ſi un Cylindre ou Priſme eſt fiché par un bout perpendiculairement dans une muraille qui ſoit à plomb, & qu'à ſon autre bout on attache le plus grand poids qu'il puiſſe ſoûtenir ſans ſe rompre, (faiſant abſtraction de la propre Gravité du Cylindre) ce poids s'appelle,
B. *La meſure du moment de la réſiſtance du Cylindre en cette poſition* ; & la réſiſtance abſoluë eſt à ce moment de la réſiſtance, comme la longueur du Cylindre eſt à la moitié du diamétre de la baſe.

Fig. 1. Tab. 19. De plus, pour démontrer que les momens de la réſiſtance des Priſmes ou Cylindres de même longueur & de differente groſſeur, comme A & B, fichez, comme il a été dit ci-deſſus, dans une muraille, ſont entr'eux com-

me les Cubes des diamétres de leurs baſes C D, E F, il ſe ſert de ces mots : *Imperò che ſe conſideriamo l'aſſoluta è* C. *ſemplice reſiſtenza che riſiede nelle baſi, cioè nè i cherchi E F, C D; all' eſſere ſtrappati facendogli forza col' tirargli per dritto, nò è dubbio che la reſiſtenza del Cilindro B è tanto maggiore che quella del Cilindro A, quanto il cerchio E F è maggiore del C D, perche tanto più ſono le fibre, i filamenti ò le parti tenaci che tengono unite le parti de i ſolidi. Mà ſe conſideriamo che nel far forza per traverſo ci ſerviamo di due leve, delle quali le parti ò diſtanze dove ſi applicano le forze ſono le linee D G, F H; i ſoſtegni ſono ne i punti D F : Mà le altre parti ò diſtanze dove ſon poſte le reſiſtenze, ſono i ſemidiametri de i cherchi D C, E F; perche i filamenti ſparſi per tutte le ſuperficie de i cerchi, è come ſe tutti ſi riduſſero ne i centri. Conſiderando, dico, tali leve, intenderemo la reſiſtenza nel centro della baſe E F contro alla forza di H, eſſere tanto maggiore della reſiſtenza della baſe C D contro alla forza poſta in G, (è ſono le forze in G & H di leve eguali D G, F H) quanto il ſemidiametro F E è maggiore del ſemidiametro D C: Creſce dunque la reſiſtanza all' eſſere rotta nel Cilindro B ſopra la reſiſtenzà nel Cilindro A, ſecondo amendüe le proportioni de i cerchi E F, D C è de i lor ſemidiametri*, &c. c'eſt-à-dire, en raiſon triplée des diamétres.

Ce que j'ai bien voulu vous rapporter tout au long, pour faire voir que M. Galilée a toûjours conſideré dans les momens de la réſiſtance des Solides, & les parties contenuës dans les ſurfaces qui doivent être ſéparées, & la diſtance de leur action; ne voulant pas m'arrêter préſentement à vous expliquer à fonds cette propoſition, qui priſe en un ſens & crûëment, eſt paralogiſtique; me réſervant à vous en entretenir plus au long une autre fois, d'autant plus volontiers, que cette réflexion ne fait rien du tout à notre ſujet.

Monſieur Galilée rapporte par après quantité de merveilleuſes proprietez des Cylindres de toutes ſortes de

groſſeur & de longueur, égaux & inégaux, ſemblables & diſſemblables; & toûjours dans la même hypotheſe, qu'ils ſoient attachez par un bout à un mur, & que l'autre s'étende librement en l'air, ſans être ſoûtenu d'aucune choſe.

Après quoi il entre en une autre conſideration à leur égard; & recherchant ce qui arrive aux Cylindres ſoûtenus ſur les deux bouts, ou ſur un point pris entre les extré-
D. mitez, il dit: *Che il Cilindro che gravato dal' proprio peſo ſara ridotto alla maſſima lunghezza oltre alla quale più non ſi ſoſterrebbe, ò ſia retto nel mezzo da un ſol ſoſtegno, ò verò di due nell' eſtremità potra eſſer lungo il doppio di quello che ſarebbe fitto nel muro, cioè ſoſtenuto in un ſol termine. Il che per ſe*
Fig. 2. Tab. 19. *ſteſſo è aſſai manifeſto, perche ſe intenderemo del Cilindro ch'io ſegno A B C, la ſua metà A B eſſere la ſumma lunghezza potente à ſoſtenerſi ſtando fiſſa nel termine B, nell' iſteſſo modo ſi ſoſterrà ſe poſita ſoprà il ſoſtegno G ſara contrapeſata d'all' altra ſua metà B C. E' ſimilmente sè del Cilindro D E F la lunghezza ſara tale, che ſolamente la ſua metà poteſſe ſoſtenerſi fiſſa nel termine D, è in conſequenza l'altra E F fiſſa nel termino F, è manifeſto che poſti i ſoſtegni H I ſotto le eſtremità D F, ogni momento che ſi aggiunga di forza ò di peſo in E, quivi ſi farà la rottura.*

Et paſſant outre par ſes méditations, il recherche, en faiſant abſtraction du propre poids des Cylindres, quelle proportion les puiſſances ont entr'elles, qui peuvent rompre les Cylindres, appuyez ſur les deux extrêmes & faiſant leur effort ſur le milieu, ou ſur un autre point qui ſoit plus proche d'un bout que de l'autre. Sur quoi il démontre que ces puiſſances, qu'il appelle autrement les momens
E. de la réſiſtance du Cylindre, ſont entr'elles en proportion réciproque des rectangles faits des parties du côté, contenuës entre les extrémitez & le point où les puiſſan-
Fig. 3. 4. Tab. 19. ces agiſſent; c'eſt-à-dire, qu'au Priſme ou Cylindre A B, ſoit qu'il ſoit ſoûtenu tantôt en C, & tantôt en D, & que la puiſſance agiſſe des extrêmes A & B; ſoit qu'il ſoit ſoû-

tenu ſous ſes extrêmes A & B, & que la puiſſance faſſe ſes efforts tantôt au point D, tantôt en C; le moment de la réſiſtance en D eſt au moment de la réſiſtance en C, comme le rectangle A C B eſt au rectangle A D B.

D'où il paroît, dit-il, qu'en tout Priſme ou Cylindre, le moment de la réſiſtance qu'il a dans ſon milieu, eſt le moindre de tous, & que ces momens s'augmentent toujours à meſure qu'ils s'éloignent du milieu, & qu'ils approchent de l'un ou de l'autre des extrêmes, & que *nelle travi grandiſſime è gravi ſe ne potrebbe levar nò piccola parte verſo l'eſtramità con notabile allegerimento di peſo, che ne i travamenti di grandi ſtanze, ſarebbe di commodo è utile non piccolo. E' bella coſa ſarebbe il ritrovar quale figura deurebbe haver quel tal ſolido, che in tutte le ſue parti fuſſe egualmente reſiſtente, tal che nò più facile fuſſe ad eſſere rotto da un peſo che lo premeſſe nel mezzo che in qualſivoglia altro luogo.* F.

Après quoi il dit immédiatement, que comme il a démontré que la réſiſtance du Priſme Quadrangulaire D B dans ſon extremité A D contre une force agiſſante en B, eſt à ſa réſiſtance en C I contre la même puiſſance en B, comme la ligne C B eſt à la ligne A B, c'eſt-à-dire, comme C N eſt à A F. Et qu'au Priſme Triangulaire inſcrit F A B G D, la réſiſtance en A D contre la force en B, eſt (ainſi qu'il le démontre en ce même endroit) à ſa réſiſtance en C O contre la même force en B, comme la ligne A B eſt à C B, ou comme A F eſt à C N: *Habbiano dunque* (dit-il) *nel trave ò Priſma D B levatone una parte, cioè la metà ſegandolo diagonalmente, è laſciato il Cuneo ò Priſma triangolare F B A; è ſono due ſolidi di conditioni contrarie, cioè quello tanto più reſiſte quanto più ſi ſcorcia, è queſto nello ſcorciarſi perde altrettanto di robuſtezza. Ora ſtante queſto par ben ragionevole, anzi pur neceſſario che ſe gli poſſadar un taglio, per il quale togliendo via il ſuperfluo rimanga un ſolido di figura tale, che in tutte le ſue parti ſia egualmente reſiſtente.* Fig. 1. Tab. 77. G.

Fig. 2. Tab. 17. Et puis il démontre fort bien enſuite, que ſi la Poutre D B eſt coupée par une ligne Parabolique F N B, qui faſſe le Solide inſcrit F A B G, ſa réſiſtance en A D contre la force en B, ſera égale à la réſiſtance en C O contre la même puiſſance en B, & ainſi par tout ailleurs. *Di qui ſi vede*, dit-il, *come con diminuzione di peſo di più di trenta trè per cento, ſi poſſon fare i travamenti ſenza punto diminuir la loro gagliardia, il che ne i navigli grandi in particolare per reggere le coperte puo eſſere d'utile non piccolo, atteſo che in cotali fabriche la legerezza importa infinitamente.* Sagr. *Le utilità ſon tante che lungo ò impoſſibil ſarebbe il regiſtrarle tutte.*

H.

Ce ſont-là les paſſages du Livre de M. Galilée, dont j'avois beſoin pour mon ſujet, que j'ai cottez par lettres Capitales, & d'où vous pouvez facilement connoître qu'il a crû que les Poutres & les Solides triangulaires, dont il a recherché les proprietez, devoient être ſoûtenus par les deux extrêmes, & ſouffrir l'effort des puiſſances preſſantes ſur differentes parties entre les bouts, puiſque les textes cottez F & H vous empêcheront d'en douter, auſſi-bien que tout le raiſonnement qui les précede.

Et que néantmoins dans la démonſtration qu'il en a faite, il les a abſolument ſuppoſé fichez par un bout & libres par l'autre, puiſqu'il dit clairement, que dans le Fig. 1. Tab. 17. Priſme D B la réſiſtance en A D contre une force en B, étoit à la réſiſtance en C I contre la même puiſſance en B, comme la ligne C B eſt à la ligne A B. Ce qui dans cette hypotheſe peut être démontré de cette maniere: Et ſuppoſé ce qui a été enſeigné par d'autres; Que ſi deux raiſons ont un même antécédent, elles ſeront entre elles comme réciproquement les termes conſéquens. Maintenant, la réſiſtance étant la même dans les ſurfaces A D & C I; les raiſons de la réſiſtance A D contre une force en B agiſſante avec la diſtance A B, & de la réſiſtance C I contre la même force en B agiſſante avec la diſtance C B, auront un même antécédent, ſçavoir cette réſiſtance A D

AD ou CI ; & partant elles ſeront entre elles comme réciproquement les termes conſéquens ; c'eſt-à-dire, que la réſiſtance AD contre une force en B, ſera à la réſiſtance CI contre la même force en B, comme la force en B agiſſante avec la diſtance CB, eſt à la même force en B agiſſante avec la diſtance AB. Mais comme dans ces momens la force eſt la même, ils ſeront comme les diſtances de leur action, c'eſt-à-dire, comme la ligne CB à la ligne AB : Donc la réſiſtance en AD contre une force en B, ſera à la réſiſtance en CI contre la même force en B, comme la ligne CB eſt à la ligne AB.

Que ſi quelqu'un vouloit ſoûtenir avec opiniâtreté, que M. Galilée a ſuppoſé dans ſa démonſtration que le Priſme DB fut ſoûtenu par ſes deux extrêmes, il ne faudra que prendre un autre point comme H, & dire en cette maniere : Le moment de la réſiſtance en C du Priſme DB, eſt au moment du même Priſme en A, comme AB eſt à CB par l'hypotheſe de la démonſtration de M. Galilée ; & par la même raiſon le moment en A eſt au moment en H, comme la ligne HB eſt à AB : Donc par égalité le moment de la réſiſtance en C du Priſme DB ſoûtenu ſur ſes deux bouts, ſera au moment en H, comme la ligne HB eſt à CB. Mais par une autre démonſtration cottée cy-deſſus par la lettre E, il a fait voir dans la même hypotheſe que la réſiſtance du Priſme DB en C étoit à la réſiſtance en H, comme le rectangle AHB eſt au rectangle ACB : Donc le rectangle AHB ſera au rectangle ACB comme la ligne HB eſt à la ligne CB ; ou, en prenant AC pour hauteur commune, comme le rectangle AC, HB au rectangle ACB : & par conſéquent le rectangle AC, HB ſera égal au rectangle AHB, & la ligne AC égale à la ligne AH, la partie au tout. Ce qui eſt abſurde. Fig. 2. Tab. 17.

J'ai donc eu raiſon de dire que la démonſtration de M. Galilée ne convient pas à ſa ſuppoſition ; & qu'encore qu'il

eût fort bien démontré que certaines proprietez appartiennent aux Solides fichez par un bout, & libres par l'autre, il n'a pas eû pour cela aucun droit de dire qu'elles dûſſent être énoncées des mêmes Solides qui ſeroient ſoûtenus par les deux bouts.

Pour la ſolution de l'autre difficulté que j'ai gardée pour la derniere, parce que c'eſt celle de laquelle il paroît que l'on doute le plus, puis qu'en toutes les propoſitions où elle eſt ſuppoſée, l'on la traite de faux & de paralogiſme. Je veux dire, pour démontrer que les momens de la réſiſtance en un même point de la Poutre & du Solide, qui lui eſt inſcrit ſelon ſa hauteur, ſont entre eux comme les quarrez des lignes perpendiculaires ſur leurs baſes communes, qui ſont compriſes en l'une & en l'autre, c'eſt-à-dire, comme les quarrez de leurs hauteurs au même point.

Il faut premierement ſe ſouvenir, ainſi qu'il eſt dit dans le diſcours cotté cy-deſſus par la lettre B, que la réſiſtance abſoluë d'un Priſme fiché perpendiculairement par un de ſes bouts dans un mur, eſt au moment de la réſiſtance du même Priſme en cette ſituation, (faiſant abſtraction de la Gravité) comme la longueur du Priſme eſt au demi-diamétre de ſa baſe.

Secondement, Que les réſiſtances abſoluës des Solides ſemblables & de même matiere, ſont entre elles comme leurs baſes; comme il eſt dit au diſcours cotté A.

Troiſiémement, Qu'un Cylindre ou Priſme, au texte cotté D, reçoit les mêmes propriétez pour ſa réſiſtance, ſoit qu'il poſe ſur ſes extrêmes & que la force agiſſe en differens endroits entre les bouts, ou qu'il s'appuye en quelque part entre ſes bouts, & que la puiſſance faſſe ſon effort ſur les extrêmes; puiſque c'eſt de cette ſorte que M. Galilée l'a entendu, & qu'il s'en eſt clairement expliqué dans les diſcours rapportez cy-deſſus au même texte D.

Fig. 3. Tab. 19. Joint que ſa propoſition, par laquelle il démontre au

texte cotté E, que les momens en D & C du Priſme ou Cylindre A B, aux extrémitez duquel A & B, les poids ou puiſſances agiſſent, & qui eſt appuyé tantôt en D, tantôt en ſon milieu C, ſont entre eux comme le rectangle A C B eſt au rectangle A D B : Cette Propoſition, dis-je, ſe peut auſſi, ſuivant ſon même raiſonnement démontrer dans l'autre hypotheſe, qui veut que le Priſme ou Cylindre ſoit ſoûtenu en A & B, & que les poids & les puiſſances agiſſent tantôt en D, tantôt en C : Car ſuppoſant le poids F, qui eſt égal à la réſiſtance en D, être diviſé en deux parties I & H, de telle ſorte que I ſoit à H, comme la ligne D B eſt à la ligne D A, (afin que le poids I ſoit égal au moment de la réſiſtance du Priſme A D fiché en A, & le poids H égal au moment de la réſiſtance du Priſme D B fiché en B); & le poids E, qui eſt égal à la réſiſtance en C, être diviſé en deux moitiez, dont l'une ſoit G; le poids E ſera au poids F, c'eſt-à-dire, la réſiſtance en C à la réſiſtance en D, en raiſon compoſée du poids E au poids G, du poids G au poids H, & du poids H au poids F. Mais le poids E eſt au poids G, comme la ligne A B eſt à C B; le poids G eſt au poids H, comme la ligne D B eſt à C B; & le poids H eſt au poids F, comme la ligne A D eſt à A B: Donc le poids E ſera au point F, en raiſon compoſée de la ligne A B à la ligne C B, de la ligne D B à la ligne C B, & de la ligne A D à la ligne A B: Mais les raiſons des lignes A D à A B & A B à C B, ſont égales à la raiſon de la ligne A D à C B: Donc la raiſon du poids E au poids F, ou du moment en C au moment en D, ſera compoſée des raiſons de A D à C B & de B D à C B; c'eſt-à-dire, comme le rectangle A D B au quarré C B, ou au rectangle A C B. Fig. 4. Tab. 191

Quatriémement, Il eſt bon de prendre garde qu'en matiere de réſiſtance des Solides, où l'on fait abſtraction de leur propre gravité, la varieté de leurs figures ne fait effet qu'en tant qu'elles déterminent plus ou moins la diſtance de l'action de la puiſſance qui agit contre la réſiſtance, &

la grandeur de la ſurface où ſe doit faire la rupture, laquelle contient plus ou moins de parties, qui ſe doivent
Fig. 1. Tab. 20. ſéparer. Je veux dire, que dans le Solide A B E, le moment de la réſiſtance en C, n'eſt aucunement alteré, quelque irrégularité de figure que l'on donne au Solide, comme celle de A P X B; pourvû que le point C, ſoit toujours en tous les cas, diſtant en la même maniere des extrêmes A & B, & que la ſurface C P I, qui contient les parties qui doivent être diviſées l'une de l'autre, ſoit toujours la même. Et cela eſt à mon avis aſſez facile à comprendre, puiſque les deux choſes, en quoi les Solides ſont differens l'un de l'autre, comme ſont leurs formes ou figures & leurs propres poids, l'une n'entre point en conſidération dans les momens de la réſiſtance, & il eſt fait abſtraction de l'autre. Et les deux choſes au contraire ſur qui roulent toutes les raiſons des réſiſtances, c'eſt-à-dire, la longueur des leviers, & la quantité & ſituation des parties réſiſtantes, dans les ſurfaces où la rupture ſe doit faire, y demeurent égales, ou plûtôt les mêmes en tous les cas.

En ſorte que l'on pourra facilement juger, que pour déterminer le moment de la réſiſtance en C du Solide difforme A P X B, il ſuffira de faire connoître celui du Priſme A E au même point C, dont la longueur A B eſt commune, auſſi-bien que la ſurface C P I, qui eſt perpendiculaire à la ligne A B, & où ſe doit faire la rupture ſur le point C.

Cinquiémement, Puiſque par le diſcours de M. Galilée cotté cy-deſſus D, il paroît qu'un Priſme, ſoûtenu par ſes deux bouts ou ſeulement en ſon milieu, & qu'on ſuppoſe étendu juſqu'à ſa plus grande longueur, ſans qu'il ſe rompe de ſon propre poids, eſt le double de celui, qui n'étant fiché que par un bout, ſera auſſi alongé autant
Fig. 2. Tab. 20. qu'il ſe peut ſans ſe caſſer. Comme ſi le Priſme A B, ſoûtenu ſur ſon milieu C, eſt ſuppoſé être étendu en ſa plus grande longueur, ſans qu'il ſe rompe en cette ſituation; il eſt, dit M. Galilée, le double du Priſme C B, qui

attaché par un de ſes bouts en C, ſera auſſi étendu autant qu'il le puiſſe être pour ſe ſoûtenir : Puiſqu'en cette hypotheſe le contrepoids que fait toute la partie A C pour tenir en équilibre le Priſme C B, fait à ſon égard le même effet que ſi le ſuſdit C B étoit fiché dans le mur en C, ne pouvant pas ſe mouvoir ſur le point C, tant en l'un qu'en l'autre cas, ſans ſe rompre.

Maintenant, ſi nous prenons la moitié du côté C B comme C E, & faiſant abſtraction de ſa propre Gravité, que nous ſuppoſerons être entierement ôtée ; ſi nous appliquons en E le poids I, qui ſoit égal à toute cette gravité du Cylindre C B ; il eſt conſtant qu'il fera le même effet qu'auparavant : Et ſi prenant tout autre point comme D, nous y mettons le poids K, qui ſoit au poids I, comme la ligne C E eſt à la ligne C D ; il eſt encore manifeſte que les choſes demeureront au premier état, & que le poids K agiſſant en D avec la diſtance C D, ſera égal à la réſiſtance du Priſme C D contenuë dans la ſurface C P, ſoit que le Priſme C D ſoit fiché dans le mur en C, ſoit qu'il ſoit arrêté ſur le point C par le Priſme C A qui lui contrepeſe. Et que ſi l'on prend la ligne C F égale à C D, & le poids L égal à K, après avoir auſſi fait abſtraction de la propre Gravité du Priſme C A & C F, il arrivera encore la même choſe : Et par conſéquent, comme le poids K eſt la meſure du moment de la réſiſtance du Priſme D C attaché en C, les deux poids égaux K & L ſeront auſſi la meſure du moment de la réſiſtance du Priſme F D appuyé en C, lorſque les puiſſances ſont en D & F, ou appuyé en D & F, lorſque la puiſſance eſt en C.

Or eſt-il que, par la propoſition de M. Galilée que nous avons rapportée cy-deſſus ſous la lettre B, la réſiſtance abſoluë, qui eſt la même aux Priſmes F D & C D, eſt au moment de la réſiſtance du Priſme C D, comme la ligne C D eſt à C G. demidiametre de la baſe ; & le moment de la réſiſtance du Priſme C D, eſt au moment du

Priſme ou Cylindre F D, comme la ligne C G eſt à la ligne C P, (le moment de C D égal au poids K, étant la moitié du moment de F D qui eſt égal aux deux poids K & L, comme C G demidiametre de la baſe eſt la moitié du diamétre C P:) Donc, par égalité, la réſiſtance abſoluë ſera au moment de la réſiſtance du Priſme F D ſoûtenu en C, comme la ligne C D eſt au diamétre C P. Ce qu'il faut remarquer.

Fig. 3. Tab. 10. Voyons à préſent ce qui arrive aux Priſmes de même longueur & largeur, & qui ne different qu'en leur hauteur, c'eſt-à-dire, pour me ſervir de vos termes, dans leſquels il ſe fait diminution que d'une ſeule dimenſion: Comme A B F E & A B Q L, dont les longueurs A B & largeur P I ou N O ſont égales, mais les hauteurs C P & C N ſont inégales: Je dis que le moment de la réſiſtance du Priſme A E dans ſon milieu C, eſt au moment du Priſme A L dans le même point C, en même raiſon que le quarré de la ligne C P eſt au quarré de la ligne C N. Car la raiſon du moment de la réſiſtance en C du Priſme A E, au moment de la réſiſtance en C du Priſme A L, eſt compoſée des raiſons du moment en C du Priſme A E à ſa réſiſtance abſoluë, de la réſiſtance abſoluë du Priſme A E à la réſiſtance abſoluë du Priſme A L, & de la réſiſtance abſoluë du Priſme A L au moment de ſa réſiſtance en C: Mais il vient d'être enſeigné cy-deſſus, que le moment de la réſiſtance en C du Priſme A E eſt à ſa réſiſtance abſoluë, comme le diamétre C P eſt au côté C B & la réſiſtance abſoluë du Priſme A E, par ce qui a été cy-deſſus rapporté de M. Galilée ſous la lettre C, à la réſiſtance abſoluë du Priſme A L, comme la ſurface C I eſt à C O, c'eſt-à-dire, comme la ligne C P eſt à C N; & la réſiſtance abſoluë du Priſme A L eſt au moment de ſa réſiſtance en C, comme le côté C B eſt au diamétre de la baſe C N. Donc la raiſon du moment de la réſiſtance en C du Priſme A E, au moment en C du Priſme A L, ſera compoſée des rai-

ſons du diamétre C P au côté C B, de la ligne C P à la ligne C N, & du côté C B au diametre C N : Mais les raiſons de C P à C B & C B à C N ſont égales à la raiſon de C P à C N. Donc la raiſon du moment A E en C au moment de A L en C, ſera compoſée des raiſons de la ligne C P à C N & C P à C N, c'eſt-à-dire, comme le quarré de C P au quarré de C N.

Je dis bien davantage ; que ſi l'on prend quelqu'autre point que ce puiſſe être comme H, le moment de la réſiſtance du Priſme A E au point H, ſera encore au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point H, comme le quarré de H M ou C P au quarré de H K ou C N. Car la raiſon du moment de la réſiſtance du Priſme A E au point H, au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point, eſt compoſée des raiſons du moment de A E en H, au moment du même A E en ſon milieu C ; du moment du Priſme A E en C, au moment du Priſme A L au même point C ; & du moment du Priſme A L en C, au moment du même Priſme A L au point H. Mais le moment de la reſiſtance du Priſme A E au point H, eſt au moment du même Priſme A E en C, comme le rectangle A C B eſt au rectangle A H B ; le moment de la réſiſtance du Priſme A E en C, eſt au moment du Priſme A L en C, comme le quarré du diamétre P C, eſt au quarré du diamétre C N ; & le moment de la réſiſtance du Priſme A L en C, eſt à ſon moment en H, comme le rectangle A H B au rectangle A C B. Donc la raiſon du moment de la réſiſtance du Priſme A E en H, au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point H, ſera compoſée des raiſons du rectangle A C B au rectangle A H B, du quarré P C au quarré C N, & du rectangle A H B au rectangle A C B. Mais la raiſon de A C B à A H B détruit celle de A H B à A C B. Il ne reſte donc plus que la raiſon du quarré P C au quarré C N ou du quarré H M au quarré H K, à laquelle ſoit égale la raiſon du moment de la réſiſtance du

Priſme A E au point H, au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point H.

Fig. 3. Tab. 20. Maintenant, ſi l'on étend un Solide, quel qu'il puiſſe être, comme l'un de ceux que nous avons conſideré A K P B R I S, qui ſoit inſcrit dans la Poutre A E, en ſorte qu'il ſoit de même longueur & largeur qu'elle, & qu'il paſſe par le point K, par où il faut s'imaginer une autre Poutre A L; il paroît par les choſes démontrées cy-deſſus, que le moment de la réſiſtance de ce Solide inſcrit au point H, eſt le même que le moment de la Poutre A L au même point; lequel étant au moment de la Poutre A E au point H, en la raiſon du quarré de H K au quarré de H M; il s'enſuit que le moment de ce Solide inſcrit en H, eſt au moment de la Poutre A E au même point, comme le quarré de H K à H M ou de C P à C N, & non pas en même raiſon que les lignes C P & C N, comme vous l'avez marqué. Et que je n'ai point fait de Paralogiſme, quand ſur cette propoſition j'ai conclu que les momens des Solides Paraboliques, en quelque maniere qu'ils ſoient inſcrits dans la Poutre ſelont ſa hauteur, ne ſont point égaux entre eux; & que ceux du Demi-cercle & de l'Ellipſe le ſont en tous leurs points.

Fig. 1. Tab. 21. Je dis des Solides Paraboliques inſcrits dans la Poutre ſelon ſa hauteur, parce que la même Poutre peut être coupée par une ligne Parabolique ſelon ſa largeur, en ſorte qu'étant ſoûtenuë par les deux bouts, les momens de la réſiſtance ſoient égaux en toutes ſes parties. Comme ſi la Poutre A E eſt coupée ſur ſa largeur G E par une Parabole G I F, dont l'axe ſoit la même largeur P I, le ſommet I & l'amplitude toute la longueur de la Poutre G F, & qui faſſe, dans la Poutre, le Solide Parabolique G I F B O A de même hauteur & longueur qu'elle.

Je dis que les momens de la réſiſtance de ce Solide Parabolique ſoûtenu ſur ſes extrêmes A & B, ſont par tout égaux; c'eſt-à-dire, que ſi ce Solide eſt rompu par une puiſſance

puiſſance ou un poids, agiſſant au point M ou H, il ſera rompu par la même puiſſance ou le même poids, qui fera effort au point P ou C; & ainſi des autres.

Parce que le moment au point H du Solide Parabolique, eſt à ſon moment au point C, en raiſon compoſée de la raiſon du moment du Parabolique en H, au moment de la Poutre A C au même point H; de la raiſon du moment de la Poutre en H, à ſon moment en C; & de la raiſon du moment de la Poutre en C, au moment du Parabolique au même point C: Mais la raiſon du moment de la réſiſtance du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre A E au même point H, eſt la même que celle des Parties du Solide, qui ſe doivent ſéparer dans la ſurface H N, aux parties contenuës dans la ſurface de la Poutre H K; c'eſt-à-dire, comme la même ſurface H N, eſt à la même ſurface H K, ou comme la ligne M N à M K ou P I (à cauſe que les ſurfaces H N & H K ont une même hauteur H M:) Et la raiſon du moment de la Poutre en H, à ſon moment en C, eſt la même que celle du rectangle A C B au rectangle A H B; & la raiſon du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, eſt celle d'égalité; puiſque c'eſt le même moment en l'un & en l'autre, par ce qui a été dit ci-deſſus. Et partant le moment de la réſiſtance du Solide Parabolique en H, au moment du même Solide au point C, ſera en raiſon compoſée des raiſons de la ligne M N à la ligne P I, & du rectangle A C B au rectangle A H B. Mais par la proprieté de la Parabole la ligne M N eſt à la ligne P I, comme le rectangle A H B eſt au rectangle A C B: Donc le moment de la réſiſtance du Solide Parabolique au point H, ſera au moment de la réſiſtance du même Solide au point C, en raiſon compoſée de celles du rectangle A H B au rectangle A C B, & du rectangle A C B au rectangle A H B, c'eſt-à-dire, en raiſon d'égalité. Et la même choſe pouvant être concluë de la même maniere en tous les points

de la baſe AB, il s'enſuit que les momens du Solide Parabolique ſont égaux, en quelque point que la puiſſance ou le poids agiſſent.

La même choſe ſe peut encore démontrer d'une autre Solide Parabolique double CRXQDPSO, qui ſera fait dans la Poutre AE, ſi ſa largeur GE eſt coupée par les deux Paraboles oppoſées en dedans DPS & DOS, dont les ſommets ſont aux points P & O, l'axe PO commun, auſſi-bien que l'amplitude DS; parce qu'en ce cas, & ſuppoſé que ce Solide ſoit ſoûtenu par ſes extrêmes Q & R: Je dis que les momens de ſa réſiſtance ſont par tout egaux. *Fig. 2. Tab. 11.*

Car ſi l'on entend que la puiſſance agiſſe au point K ou H, & puis au point N ou C; le moment de la réſiſtance du double Parabolique en H, ſera à ſon moment en C, en raiſon compoſée du moment du Parabolique en H, au moment du Priſme AE au même point H ou I; du moment du Priſme en I, à ſon moment en C; & du moment du Priſme en C, au moment du Parabolique au même point C. Mais la raiſon du moment du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre AE au même point H ou I, eſt la même que celle de la ſurface HL à la ſurface IM, c'eſt-à-dire, (à cauſe de la commune hauteur FH) de la ligne HT ou FL à la ligne ZM ou PO; & la raiſon du moment de la Poutre AE en I à ſon moment en C, eſt la même que celle du rectangle ACB au rectangle AIB, c'eſt-à-dire, du rectangle DNS au rectangle DKS; & enfin la raiſon du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, eſt la raiſon d'égalité: Et partant la raiſon du moment de la réſiſtance du Solide Parabolique au point H, au moment du même Solide au point C, ſera compoſée des raiſons de la ligne FL à la ligne PO, ou, prenant les moitiez, de la ligne FK à la ligne PN, & du rectangle DNS au rectangle DKS: Mais par la proprieté de la Parabole, la ligne FK eſt à la ligne PN, comme le rectangle DKS eſt au rectangle DNS:

Donc le moment de la réſiſtance du Solide Parabolique au point H, à ſon moment au point C, ſera en raiſon compoſée des raiſons du rectangle D K S au rectangle D N S, & du rectangle D N S au rectangle D K S, c'eſt-à-dire, en raiſon d'égalité. Ce qui ſe pouvant dire en la même maniere de tous les points de la baſe du Solide Parabolique, on peut conclure que les momens de la réſiſtance ſont par tout égaux.

J'ai été bien-aiſe de vous rapporter les proprietez de ces Solides Paraboliques, afin de vous avertir en même temps, que cette égalité de momens de leurs réſiſtances, ne fait rien du tout au Théoréme de M. Galilée, qui eſt toûjours faux en la maniere qu'il l'a propoſé, n'ayant jamais, en toutes ſes figures & en tous ſes raiſonnemens, conſideré les ſections ou coupes des Priſmes ou Poutres en autre maniere que ſelon leur hauteur, & jamais ſelon leur largeur.

Et pour vous ôter le ſcrupule qui vous peut reſter ſur cette matiere, en ſorte que vous ne puiſſiez plus douter, comme vous faites, qu'un ſi grand Homme ait pû ſe méconter; je veux vous faire voir encore quelques exemples, que j'ai tirez de ſes mêmes Dialogues méchaniques, qui me font peine, & que je ſouhaiterois avoir été plus clairement expliquez par leur Auteur.

Le premier eſt celui dont je vous ai dit un mot ci-deſſus au texte cotté C, qui fait la 4. Prop. du 2. Dial. des Mech. où il dit, qu'aux Cylindres ou Priſmes de même longueur, & de differentes groſſeurs, les momens de la réſiſtance croiſſent en raiſon triplée des diamétres de leurs baſes; c'eſt-à-dire, que le moment de la réſiſtance du Cylindre B, eſt au moment de la réſiſtance du Cylindre A, comme le Cube de la ligne E F, eſt au Cube de la ligne C D. *Fig. 4. Tab. 20.*

Ce qui ne peut pas être véritable, s'il ne fait abſtraction du poids des Cylindres A & B, dont il ne parle pourtant point du tout; au contraire, par la liaiſon de cette Propo-

ſition avec la précedente, il ſemble que les momens de la réſiſtance doivent être conſiderez, dans cette Propoſition, comme les momens du poids ou de la puiſſance ſont conſiderez dans la 3e Prop. qu'il conclut en ces termes : *Concludaſi per tanto, i momenti delle forze de i Priſmi e Cilindri egualemente groſſi, mà diſegualmente lunghi eſſer trà di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè eſſer come i quadrati delle lunghezze.*

Monſtreremo adeſſo nel ſegondo luogo, ſegondo qual proporzione creſca la reſiſtenza all' eſſer ſpezzati ne i Priſmi e Cilindri, mentre reſtino della medeſima lunghezza, è ſi accreſca la groſſezza. E' qui dico che (Prop. 4.) *Ne i Priſmi è Cilindri egualmente lunghi, ma diſegualmente groſſi, la reſiſtenza all' eſſer rotti creſce in triplicata proporzione de i diametri delle lor großezza, cioè delle lor baſi.*

Ce qui fait voir que les momens du poids, ou de la puiſſance, ayant été conſiderez, dans la 3e Prop. relativement au moment de leur réſiſtance ; les momens de la réſiſtance doivent, par la même raiſon, être conſiderez, dans la 4e Prop. avec rélation aux momens des puiſſances.

Auquel cas, comme les momens des puiſſances, dans la 3e Prop. ſont en raiſon doublée des côtez des Cylindres, à cauſe que le moment de la réſiſtance eſt le même en l'un & en l'autre ; il faudroit de même, dans la 4e Prop. que les momens des poids des Cylindres de même longueur & de differente groſſeur, fuſſent toûjours égaux, pour conclure que les momens de leurs réſiſtances, ſont comme les Cubes des diamétres de leurs baſes.

Mais comme les momens des poids de ces Cylindres ne ſont point égaux, auſſi les momens des réſiſtances ne croiſſent pas, ſur cette hypotheſe, en la même raiſon que les Cubes des diamétres de leurs baſes, mais ſeulement en celle des mêmes diamétres. Ce que je démontre en cette maniere, après avoir coupé les lignes D G & F H en deux également en K & L, auſſi bien que les deux C D & E F en M & I, & fait F N égale à D M.

Fig. 4. Tab. 20.

La réſiſtance abſoluë du Cylindre A, eſt à la réſiſtance abſoluë du Cylindre B, comme la baſe C D eſt à la baſe E F: Et parce que les Cylindres ſont de même longueur, ils ſeront auſſi comme leurs baſes, auſſi-bien que leur poids; & partant le poids du Cylindre A, ſera au poids du Cylindre B, comme la réſiſtance abſoluë du Cylindre A, eſt à la réſiſtance abſoluë du Cylindre B. Maintenant, comme le centre de l'action de la réſiſtance abſoluë du Cylindre A, fiché dans le mur à angles droits, eſt au centre de la baſe M; & le centre de l'action du poids du même Cylindre A eſt au point K, en ſorte que la réſiſtance abſoluë réſiſte par la ligne D M, & le poids agit par la ligne D K: Si nous ſuppoſons que le centre de l'action de la réſiſtance du Cylindre B ſoit au point N, comme le centre de l'action du poids du même Cylindre eſt au point L, en ſorte que la réſiſtance abſoluë du Cylindre B réſiſte par la ligne F N, égale à la ligne D M, ainſi que le poids du même Cylindre B agit par la ligne F L, égale à la ligne D K, il n'y aura, dans cette ſuppoſition, aucun changement aux raiſons des poids ni des réſiſtances; & le moment de la réſiſtance du Cylindre A en M, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre B en N, comme le moment du poids A en K, eſt au moment du poids B en L; & en permutant, la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre A en M, au moment du poids du même Cylindre A en K, ſera égale à la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre B en N, au moment du poids du même Cylindre B en L. Mais parce que le centre de l'action de la réſiſtance du Cylindre B eſt au point I, centre de la baſe E F; & le moment de la réſiſtance au point I, eſt au moment de la réſiſtance au point N, comme la ligne F I à la ligne F N, c'eſt-à-dire, D M; ou prenant leurs doubles, comme le diamétre E F eſt au diamétre C D; il s'enſuit que le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I, au regard du moment du poids B en L, eſt plus grand que le moment de la réſiſtance du même

Cylindre B en N, au regard du même poids B en L; c'eſt-à-dire, (en prenant des raiſons égales) plus grand que le moment de la réſiſtance du Cylindre A en M, au regard du poids A en K; en la même raiſon que le diamétre E F eſt plus grand que le diamétre C D: & par conſéquent que le moment de la réſiſtance du Cylindre B au regard de ſon poids, s'eſt accrû ſur le moment de la réſiſtance du Cylindre A au regard de ſon propre poids, en la raiſon de l'accroiſſement du diamétre de la baſe E F ſur le diamétre de la baſe C D, & non pas en la raiſon des Cubes de ſes diamétres. Ce qu'il falloit démontrer.

La même Propoſition ſe peut démontrer encore d'une autre maniere, après avoir fait que comme le diamétre C D eſt au diamétre E F, ainſi F L ſoit à F O.

La raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre A en M, au moment de la réſiſtance du Cylindre B en I, eſt compoſée de la raiſon de la baſe C D à la baſe E F, & de celle du demi-diamétre D M au demi-diamétre F I, ou de la ligne C D à la ligne E F. Et la raiſon du moment du poids du Cylindre A en K, au moment du poids B en O, eſt compoſée des mêmes raiſons, ſçavoir de celle du poids A au poids B, qui eſt égale à celle de la baſe C D à la baſe E F; & de celle de la ligne D K ou F L à la ligne F O, qui par la conſtruction eſt la même que celle de C D à E F: Donc le moment de la réſiſtance du Cylindre A en M, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre B en I, comme le moment du poids du Cylindre A en K, eſt au moment du poids du Cylindre B en O: Et en permutant, le moment de la réſiſtance du Cylindre A en M, ſera au moment du poids A en K, comme le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I, eſt au moment du poids B en O.

Maintenant, par ce qui a été démontré par d'autres, que ſi deux raiſons ont un même antécédent, elles ſeront entr'elles comme réciproquement les termes conſequens; il s'enſuit que la raiſon du moment de la réſiſtance du Cy-

lindre B en I au moment du poids B en L, & la raiſon du même moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au moment du même poids B en O, ayant un même antécédent, ſçavoir le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I; elles ſeront entr'elles comme réciproquement les termes conſéquens, c'eſt-à-dire, que le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, ſera au moment de la même réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O, comme le moment du poids B en O, eſt au moment du même poids B en L, c'eſt-à-dire, comme la ligne B O eſt à la ligne B L, ou comme le diamétre E F au diamétre C D; & partant que le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du même poids B en O, comme la ligne E F eſt à la ligne C D. Mais il a été montré ci-deſſus, que le moment de la réſiſtance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, étoit égal au moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O. Donc le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, comme le diamétre E F eſt au diamétre CD. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reſte, la verité du Corollaire qui ſuit la 4. Prop. & qui dit, que les réſiſtances ſont en raiſon ſeſquialtere des poids des Cylindres, n'en paroît pas moins, dans cette hypothéſe de l'accroiſſement des réſiſtances en raiſon des diamétres des baſes des Cylindres par relation aux poids, que dans l'autre, où les réſiſtances s'augmentent en raiſon des Cubes des mêmes diamétres; ſi l'on ſe ſouvient que les réſiſtances abſoluës & les poids croiſſent l'un & l'autre en raiſon doublée des diamétres, & que les diſtances de l'action des poids, étant les mêmes à cauſe de la même

longueur des Cylindres, le moment des poids ne s'augmente point : Mais les diſtances de l'action des réſiſtances s'augmentant en raiſon des diamétres, à cauſe de la difference des groſſeurs ; il s'enſuit qu'ajoûtant cette raiſon des diamétres à celle des réſiſtances abſoluës, c'eſt-à-dire, à celle des quarrez des mêmes diamétres, il ſe fera la raiſon triplée des diamétres pour celle des momens des réſiſtances, qui par conſéquent eſt ſeſquialtere de celle des momens des poids, qui eſt demeurée doublée des mêmes diamétres.

Ce que nous venons de dire de la 4. Prop. ſe peut encore aſſûrer de la 5. du même Livre, laquelle dit, que *I Cilindri è Priſmi di diverſa lunghezza, è groſſezza hanno le lor reſiſtenze all' eſſer rotti di proporzione compoſta della proporzione de i Cubi de i diametri delle lor baſi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatament preſe* ; & qui ne peut être veritable, ſi l'on ne fait encore abſtraction du propre poids des Cylindres, dont M. Galilée ne parle pourtant point du tout, non plus qu'aux précedentes, ni en celles qui ſuivent. Puiſque ſi l'on conſidere les momens de la réſiſtance des Cylindres de differentes longueurs & groſſeurs rélativement aux momens de leurs propres poids, elles ne ſeront pas, comme il dit, en raiſon compoſée de la proportion des Cubes des diamétres de leurs baſes, & de celle de leurs côtez pris réciproquement ; mais bien en raiſon compoſée de la proportion des diamétres des baſes, & de celle des quarrez des côtez des Cylindres pris réciproquement. Ce que je démontre en cette maniere, & ſur la fig. de M. Galilée, qui fait la ligne E G égale à B C.

Fig. 5. Tab. 20. La raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre A C au regard du moment du poids du même Cylindre A C, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même Cylindre D F, eſt compoſée de la raiſon du moment de la réſiſtance de A C au regard du moment du poids du même A C, au moment de la réſiſtance

ſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids D G, & de la raiſon du moment de la réſiſtance D G au regard du moment du poids D G, au moment de la reſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F. Mais la raiſon du moment de la réſiſtance de A C au regard du moment du poids de A C, au moment de la réſiſtance de D G au regard du moment du poids D G, eſt la même que la raiſon du diamétre A B au diamétre D E, par ce qui a été démontré ci-deſſus; & la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids de D G, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F, eſt la même que celle du quarré du côté E F au quarré du côté E G ou B C, ainſi que je le démontrerai ci-deſſous. Et partant la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre A C au regard du moment du poids A C, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F, ſera compoſée des raiſons du diamétre A B au diamétre D E, & du quarré du côté E F au quarré du côté B C. Ce qu'il falloit démontrer.

Or pour faire voir que la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids du même D G, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même D F, eſt égale à celle du quarré E F au quarré E G; je dis ainſi. Les raiſons des momens de la réſiſtance des deux Cylindres D G & D F aux momens de leurs poids, ayant un même antécédent, ſçavoir le moment de la réſiſtance, qui eſt le même en tous les Cylindres de même groſſeur; elles ſeront entr'elles comme les termes conſéquens, pris réciproquement, (par ce qui a été démontré par d'autres.) C'eſt-à-dire, que la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D G au moment du poids du même D G, ſera à la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D F au moment du poids du même D F, comme réciproquement le mo-

ment du poids du Cylindre D F, eſt au moment du poids du Cylindre D G. Mais par la 2e Prop. de M. Galilée, le moment du poids de D F, eſt au moment du poids de D G, comme le quarré du côté E F eſt au quarré du côté E G: Donc le moment de la réſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids du même D G, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même D F, comme le quarré du côté E F, au quarré du côté E G ou B C.

Il y a encore une maniere de raiſonner, qui fait peine, dans ſon 3. Dial. où, après avoir fort bien dit, *Motum æqualiter ſeu uniformiter acceleratum dico illum, qui à quiete recedens, temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta ſibi ſuperaddit.* Il fait un diſcours excellent pour l'explication de cette définition, contre laquelle enſuite il ſe fait faire une objection, qu'il réſout en cette ſorte.

Sagr. *Per quanto per ora mi ſi rappreſenta all' intelletto, mi pare che con chiarezza forſe maggiore ſi fuſſe potuto definire ſenza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato eſſer quello nel quale la velocità andaſſe creſcendo ſegondo che creſce lo ſpazio che ſi và paſſando: ſi che per eſſempio il grado di velocità acquiſtato dal mobile nella ſceſa di quattro braccia, fuſſe doppio di quello che'gli hebbe, ſceſo che fù lo ſpazio di due, è queſto doppio del conſeguito nello ſpazio del primo bracio. Perche non mi par che ſia dà dubitare, che quel grave, che viene dall' altezza di ſei braccia, non habbia, è perquota con impeto doppio di quello che hebbe, ſceſo che fù trè braccia, è triplo di quello che hebbe alle due, è ſeſcuplo dell' havuto nello ſpazio di uno.* Salu. *Io mi conſolo aſſai d'haver havuto un tanto compagno nell' errore; è più vi dirò, che il voſtro diſcorſo hà tanto del veriſimile, è del probabile, che il noſtro medeſimo Autore non mi niegò, quando glielo propoſi, d'eſſer' egli ancora ſtato per qualche tempo nella medeſima fallacia. Ma quello, di che io poi ſommamente mi maravigliai, fu il vedere ſcoprir con quattro ſempliciſſime parole, non pur falſe, mà impoſſibili*

due propoſizioni, che hanno del veriſimile tanto, che havendole io propoſte à molti, non hò trovato, chi liberamente non me l'ammeteſſe. Simpl. *Veramente io ſarei del numero de i conceditori, è che il grave deſcendente,* Vires acquirat eundo, *creſcendo la velocità à ragion dello ſpatio, è chel momento dell' iſteſſo percutiente ſia doppio venendo da doppia altezza, mi paiono propoſizioni da concederſi ſenza repugnanza, ò controverſia.* Salu. *E' pur ſon tanto falſe e impoſſibili, quanto che il moto ſi faccia in un inſtante. Et eccòvene chiariſſima dimonſtrazione. Quando le velocità hanno la medeſima proporzione, che gli ſpazii paſſati ò da paſſarſi, tali ſpazii vengon paſſati in tempi eguali; ſe dunque le velocità, con le quali il cadente paſſò lo ſpazio di quattro braccia, furono doppie delle velocità, con le quali paſſò le due prime braccia (ſi come lo ſpazio è doppio dello ſpazio) adunque i tempi di tali paßaggi ſono eguali; mà paſſare il medeſimo mobile le quattro braccia, e le due nell' iſteſso tempo, non può haver luogo fuor che nel moto inſtantaneo. Mà noi veggiamo, che il grave cadente fà ſuo moto in tempo, & in minore paſſa le due braccia, che le quattro. Adunque è falſo, che la velocità ſua creſca come lo ſpazio. L'altra propoſizione ſi dimoſtra falſa con la medeſima chiarezza,* &c. Sagr. *Troppa evidenza, Troppa agevolezza è queſta, con la quale manifeſtate concluſioni aſcoſte; Queſta ſomma facilità,* &c.

Qui fait paroître que la ſolution de cette objection lui plaît extraordinairement; & il en fait tant de cas, qu'il ne peut quaſi ſe laſſer d'en exagérer la beauté.

Et cependant je vous avouë franchement la foibleſſe de mon eſprit, qui ne l'a pû juſqu'ici comprendre en aucune maniere, quelque ſoin que j'aye pris de méditer ſur ſon raiſonnement, lequel au contraire m'a toûjours paru faux, & paralogiſtique en ſa forme, quoiqu'il ſoit très-veritable en ſa matiere.

Et pour vous faire voir mon ſentiment, je vous dirai que pour avoir démontré, dans la 2e Prop. du même Dial.

au commencement, lorſqu'il a expliqué les proprietez du mouvement égal & uniforme, que *ſi ſpatia ſint ut velocitates, tempora erunt æqualia.* Je ne vois pas pour cela, que parlant des proprietez du mouvement acceleré, (permettez-moi de me ſervir de ce terme) il ait pû dire, que *quando le velocità hanno la medeſima proporzione che gli ſpazii paſſati, ò da paſſarſi, tali ſpazii vengon paſſati in tempi eguali.* Ce qui peut être abſolument nié, puiſque ces mouvemens ſont ſi differens, qu'il n'y a aucune connexité entre ces deux Propoſitions, & ce qui convient à l'un, peut abſolument ne pas convenir à l'autre. Et cependant c'eſt de cette Majeure, que M. Galilée tire ces conſéquences qui raviſſent M. Sagredo, & qui font qu'il s'écrie avec tant d'emportement, *Troppa Evidenza, troppa agevolezza*, &c.

Que ſi l'on veut dire qu'il a pû argumenter ſur les proprietez du mouvement acceleré, comme il a fait ſur celles du mouvement égal & uniforme, par ce qu'il démontre un peu au-deſſous dans la 1. Prop. de l'acceleré, que *Tempus in quo aliquod ſpatium à mobili conficitur latione ex quiete uniformiter acceleratâ, eſt æquale tempori, in quo idem ſpatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato, cujus velocitatis gradus ſubduplus ſit, ad ſummum ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.* Qui fait voir la rélation qu'il y a entre les deux mouvemens; & que pour ce qui regarde les temps & les eſpaces, ce qui ſe dit de l'un, peut être proportionnellement entendu de l'autre.

Je répondrai que ce diſcours, quelque veritable qu'il ſoit en ſoi-même, ou, comme on dit dans les Ecoles, par ſa matiere, il eſt toûjours faux dans ſa forme; & le Paralogiſme ne fait que changer de nom, en ce que ci-deſſus on pouvoit l'appeller, comme on dit en Logique, *à non cauſa tanquam à cauſa*, & ici *à petitione Principii.* Puiſque cette premiere propoſition du mouvement acceleré, ſup-

poſant & étant fondée ſur la définition conteſtée, il n'eſt pas juſte de vouloir démontrer celle-ci par l'autre.

Voilà donc les Obſervations que j'ai faites ſur ces matieres, que je ne vous rapporte point avec un eſprit de critique, ou d'un homme qui ne cherche que ce qui peut être repris dans les plus beaux Ouvrages, puiſqu'il n'y a peut-être perſonne au monde, qui ait plus d'amour & d'eſtime pour tout ce qui vient de M. Galilée que moi, qui ai eu l'honneur d'être de ſes derniers Diſciples, & qui ai travaillé depuis tant d'années à étendre cette Doctrine de la réſiſtance des Solides dont il eſt l'Inventeur, & qu'il a renfermée dans un ſi petit nombre de propoſitions; ayant pour ce ſujet compoſé le Livre que vous avez vû prêt à être donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle *Galilæus Promotus de reſiſtentia Solidorum*; & qui pouvant quelque jour être mis en lumiere, fera aſſez connoître ma reconnoiſſance, & le reſpect que je porte à la memoire de ce grand Homme, que notre bon Ami M. Gaſſendi appelloit ordinairement le Platon de notre ſiécle.

Ce n'eſt donc pas dans le deſſein de rien cenſurer dans ſes Ecrits que je vous ai marqué mes ſentimens; mais ſeulement pour vous faire voir que ce n'eſt pas miracle, que dans le nombre infini de méditations toutes divines, dont il a rempli ſes Ouvrages, quelques petites bagatelles comme celles-ci, lui ſoient échappées ſans y avoir pris garde.

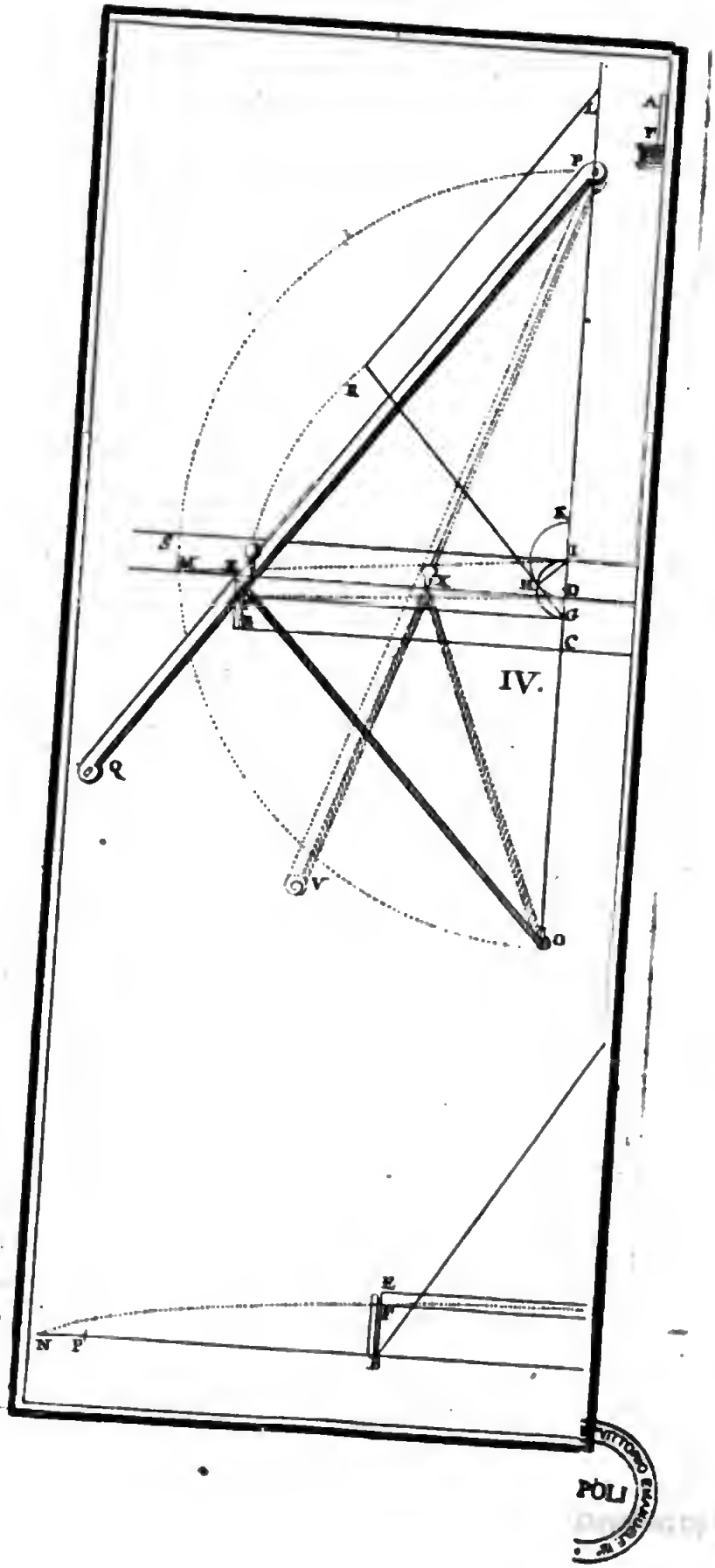
Ce qui eſt, à mon avis, tout ce que je devois vous dire, pour vous tirer des doutes qui vous étoient venus ſur la lecture de mon écrit: Et ſi dans tout ce diſcours vous trouvez encore quelque choſe qui ne vous ſatisfaſſe pas entierement, il faudra que nous nous en entretenions plus particulierement enſemble; & que ſur le Livre même de M. Galilée j'eſſaye de me mieux expliquer que je n'ai pû faire dans les raiſonnemens que je vous ai communiquez, où j'ai eu le malheur de ne me ſçavoir pas ſi nettement faire entendre.

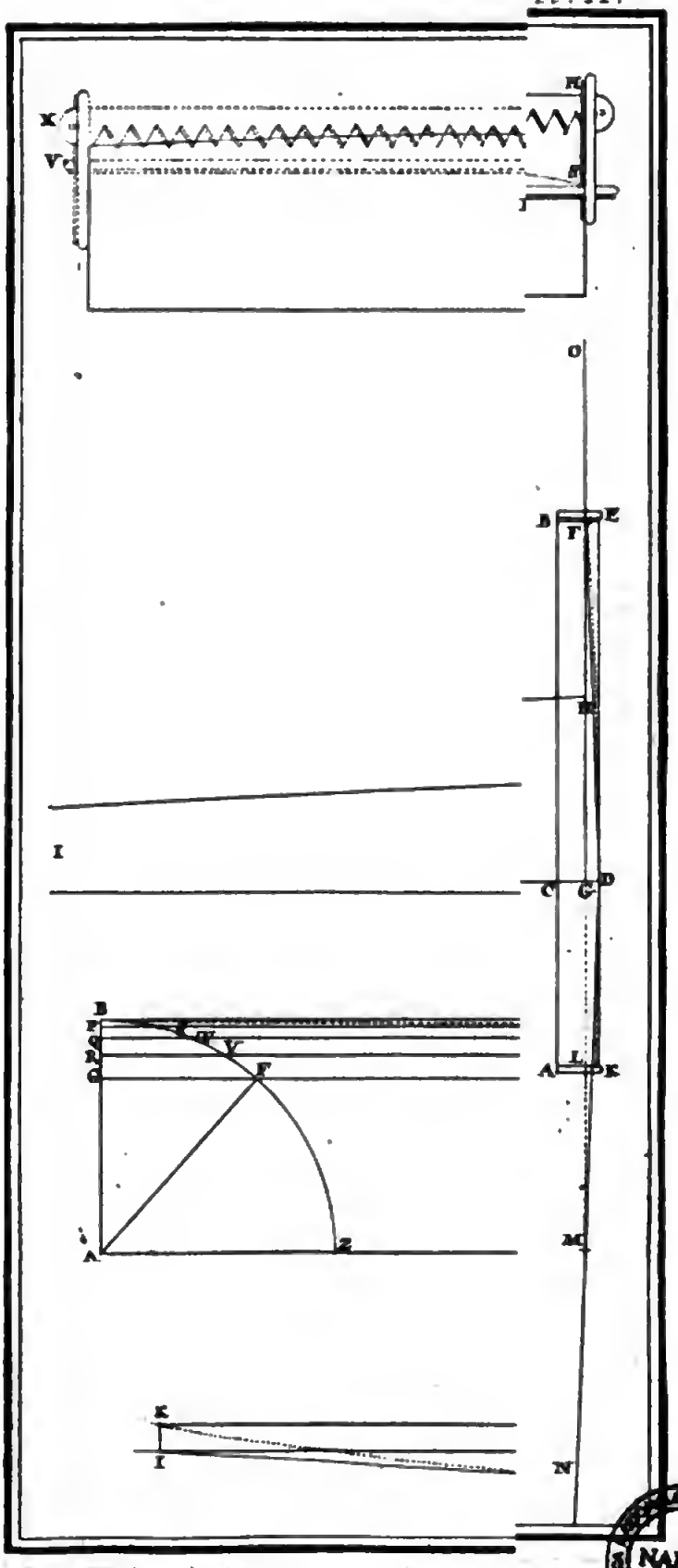
Et c'eſt une des principales raiſons qui m'ont fait étendre un peu plus au long dans cette Lettre, & rapporter quantité de paſſages aux mêmes termes de M. Galilée; puiſque dans cette queſtion il ſeroit toûjours fâcheux de tomber dans l'inconvenient, où une autre de pareille nature a jetté dans ces derniers temps les plus beaux eſprits de l'Europe. Adieu, Monſieur; conſervez-moi toûjours l'honneur de vos bonnes graces. A Paris, ce 18. Juillet 1661.

FIN.

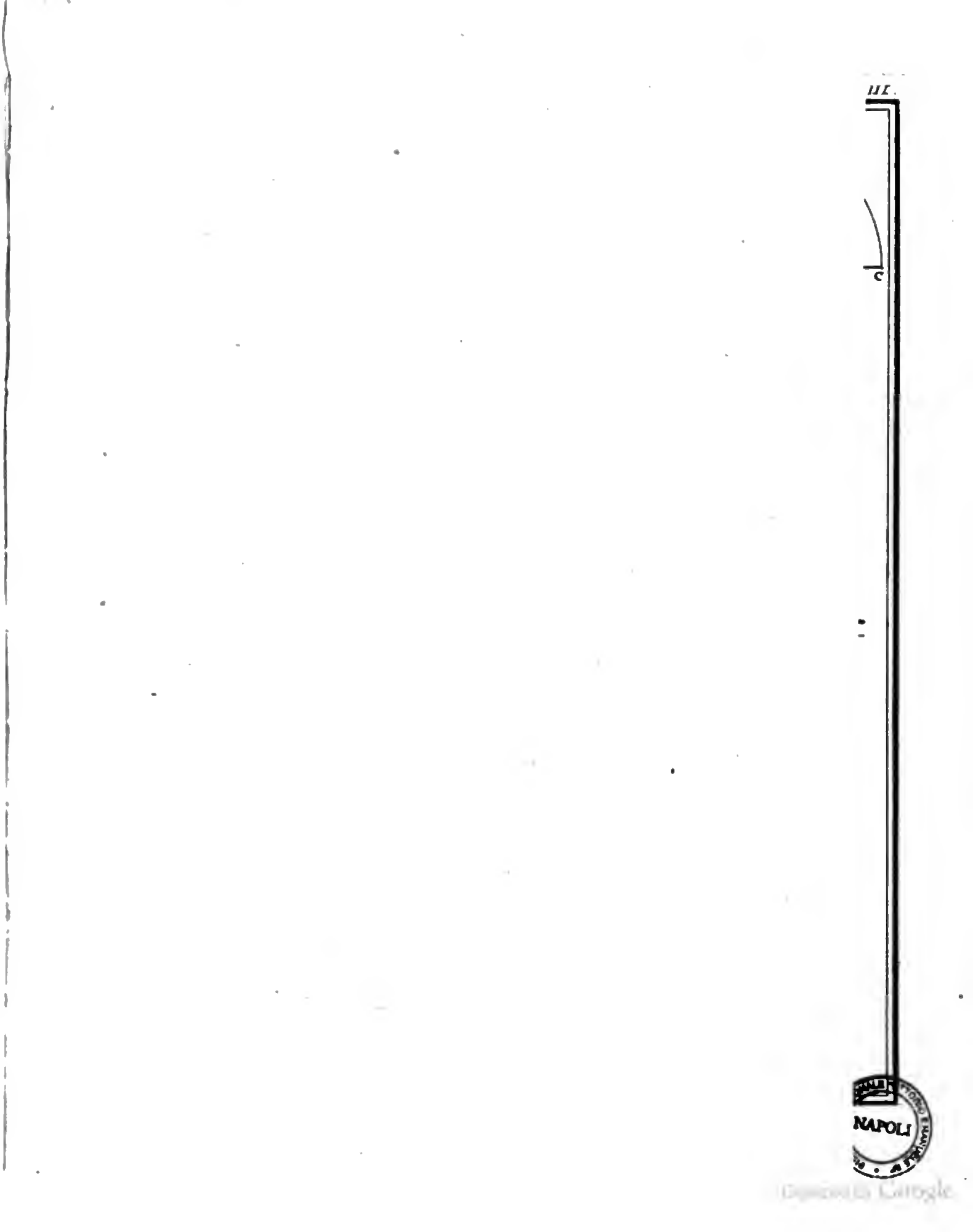
VA135980

Digitized by Google

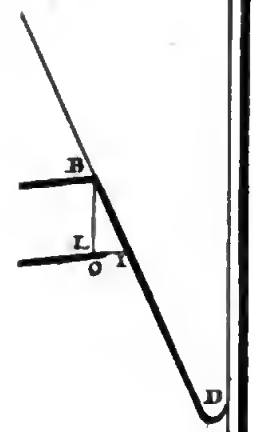

IV.
POLI



NAPOLI


NAPOLI

III.



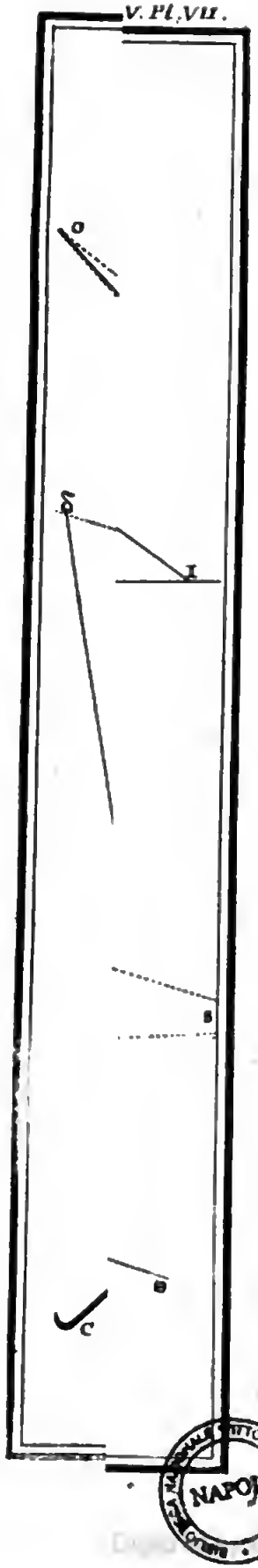
V.

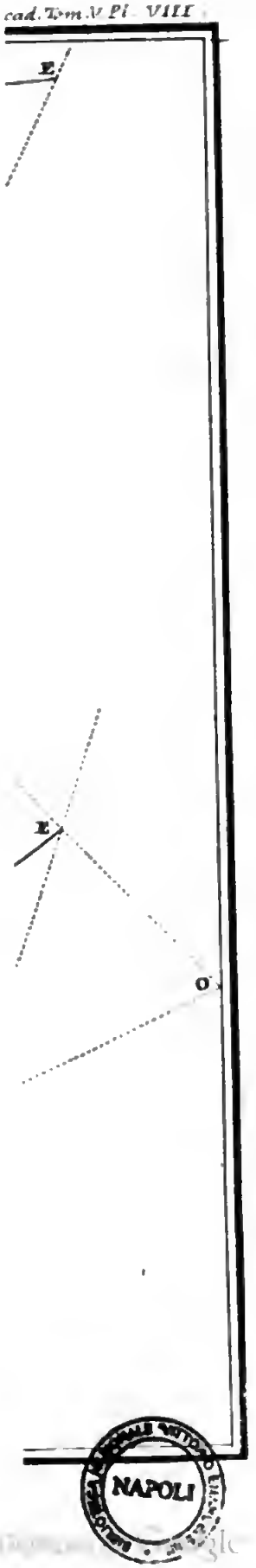
NAPOLI

IV.

NAPOLI

NAPOLI


V. Pl. VII.
a
b
I
B
C
a

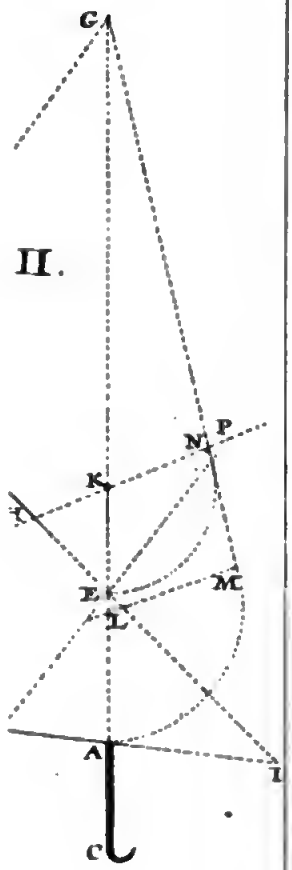


NAPOLI

NAPOLI

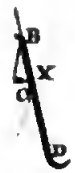
Digitized by Google

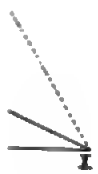
II.



NAPOLI

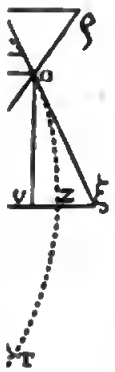
Digitized by Google



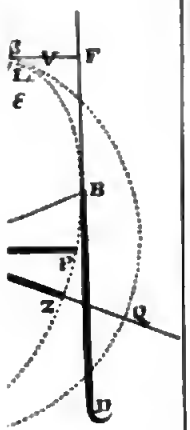


NAPOLI

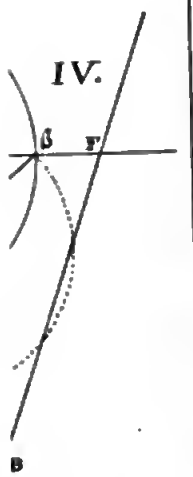
III.



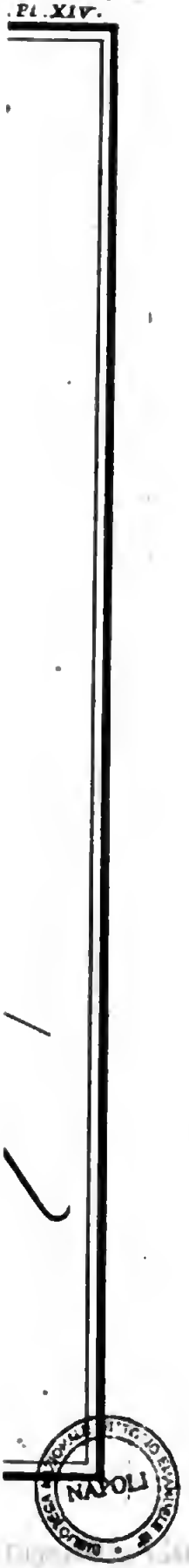
NAPOLI



IV.



NAPOLI

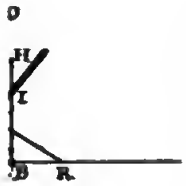


NAPOLI

IV.

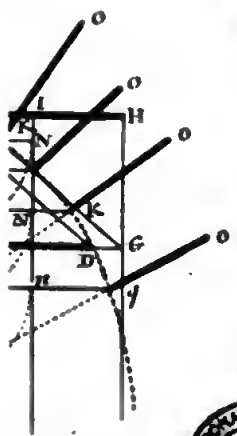
II.

NAPOLI

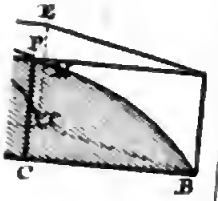


V.

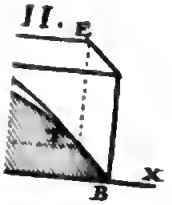
I.



NAPOLI

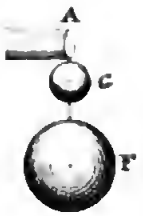


II.



NAPOLI

NAPOLI



NAPOLI

NAPOLI

NAPOLI